MN41

Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur

UTBM le 17 Janvier 2007 *Examen Final* *S. A. - N. L. - M. I.*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+P(x)=0 \qquad 0<x<L$$

avec $u(0)=U_0$ *en* $x=0$

et $-k(L)\frac{du}{dx}(L)=u'_L$ *en* $x=L$

Le domaine *[0,L]* est composé de trois éléments finis de même longueur sur lesquels on applique une approximation nodale linéaire et le principe de pondération de Galerkin.

a) Décrire les étapes nécessaires de la méthode des éléments finis pour déterminer les variables nodales sur le domaine *[0,L]* en utilisant les données suivantes :
$L=3$, $k(x)=1$, $P(x)=x$, $U_0=0$, $U'_L=5$.

b) Comparer le résultat avec la solution exacte aux points $x=1$, $x=1{,}5$ et $x=2$.

c) Déterminer la nouvelle valeur de U'_L si on veut doubler la valeur du troisième nœud ($x=3$).

II- Résidus pondérés

a) Utiliser le principe de la méthode de Galerkin pour résoudre l'équation suivante :

$$\frac{d^2u}{dx^2}-u(x)=exp(x) \qquad 0<x<L=1$$

avec les conditions aux limites : $u(0)=1$ et $u'(1)=0$

La solution approchée sera recherchée sous la forme d'un développement sur la base polynomiale : $\tilde{u}(x)=\sum_{k=0}^{3}a_kF_k(x)$, $F_k(x)=x^k$. Utiliser une la méthode LU pour la résolution.

b) Utiliser le principe de collocation par points pour résoudre l'équation : $\frac{d^2u}{dx^2}-u(x)=f(x)$, $0<x<1$ avec $u(0)=1$ et $u'(1)=0$ et deux données supplémentaires : $f(0{,}25)=e^{1/4}$, $f(0{,}5)=\sqrt{e}$. Utiliser une la méthode Gauss pour la résolution.