

MN41
Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur

UTBM le 17 Janvier 2011

Examen Final

S. Abboudi, N. Labeled

Résumé de cours autorisé

I- Eléments finis 1D

On considère le système : équation différentielle et conditions limites

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + P = 0 \quad 0 < x < L, \quad (S)$$

$$-k \frac{du}{dx}(0) = a \quad \text{en } x=0 \quad \text{et} \quad -k \frac{du}{dx}(L) = b(u(L) - U_f) \quad \text{en } x=L \quad (CL)$$

a, b, k, P, U_f, L sont des constantes connues.

- 1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.
- 2) Détailler le calcul des matrices élémentaires de **trois** éléments finis de même longueur l , en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin.
- 3) Assembler les trois éléments et utiliser la méthode de Thomas pour calculer numériquement la solution sur les nœuds des éléments.

AN : $a = 100, b = 50, k = 1, P = 10, U_f = 20, L = 6$.

II - Eléments finis 2D

On considère l'EDP elliptique suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P = 0$ définie sur le domaine D

avec les conditions aux limites : $u(1,0) = 0, u(0,1) = U_0$ (CL)

Le domaine D représente un losange défini par les nœuds 1, 2, 3 et 4 de coordonnées respectives $(1,0), (2,1), (1,2)$ et $(0,1)$. Le nœud central 5 de coordonnées $(1,1)$ permet de mailler le losange en quatre éléments finis triangulaires de même surface.

- 1) Ecrire les quatre matrices élémentaires en respectant la localisation de chaque élément.
- 2) Assembler les quatre éléments.
- 3 Déterminer la solution aux nœuds en prenant en compte les conditions aux limites (CL).

AN : $P = 50, U_0 = 10$.

Rappel : pour un élément fini triangulaire de référence défini par $(A(0,0), B(1,0)$ et $C(0,1))$, le système élémentaire est donné par :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{P}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

III - Différences finies 2D

On considère à nouveau l'EDP elliptique : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P = 0$ définie sur le domaine rectangulaire

de côtés a suivant ox et b suivant oy . On applique les valeurs U_g, U_b et U_h sur les côtés : gauche, bas et haut du rectangle et sur le côté droit une condition de Neuman U'_d .

Calculer la solution aux nœuds inconnus en utilisant 2 pas selon ox et 3 selon oy .

AN : $a = 2, b = 3, P = 50, U_g = 10, U_b = U_h = 0, U'_d = 20$.