
UTBM le 27 Juin 2012 *Examen Final* *S. Abboudi. N. Labed*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis

On considère le système suivant :

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+p(x)=0 \qquad 0<x<L, \qquad (S)$$

$$u(x)=U_0 \quad \text{en } x=0 \qquad et \qquad -k\frac{du}{dx}=U_L' \quad \text{en } x=L$$

U_0, U_L' sont des constantes connues,

$k(x)$ et $p(x)$ sont des fonctions connues traduisant respectivement une propriété physique et une action extérieure sur le système.

$u(x)$ est donc l'inconnue du problème que l'on cherche à approcher par éléments finis.

Pour toutes les questions, sauf pour (7), on supposera : $k(x)=k$, $p(x)=0$, $U_0=0$, $l_i=x_i-x_{i-1}=l=1, i=1,2,...,n$ $x_0=0$, $x_n=L=nl=n$.

1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.

2) Détailler le calcul de la matrice élémentaire du premier élément en se plaçant dans le cas d'une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin.

3) Etudier en détail le cas *n=2* et déterminer la solution en fonction k, U_L' et de L.

4) Utiliser la méthode de Thomas pour étudier le cas *n=3*.

5) Généraliser le résultat pour un nombre quelconque *n*.

6) Calculer la nouvelle valeur de U_L' pour que la valeur de la dernière variable nodale en *x=L* soit identique quelque soit *n*.

7) Reprendre la question 3 en supposant $k(x)=\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})$ $p(x)=x$.

8) Reprendre la question 3 en supposant $k(x)=1$ $p(x)=0$ et en utilisant un seul élément avec une approximation nodale d'ordre 2.

II - Résidus pondérés

1- Méthode de Galerkin :

Utiliser le principe de Galerkin pour déterminer la solution approchée du système (S) avec les données suivantes : $p(x)=0$, $k(x)=1$, $U_0=0$, $U_L'=10$, $L=2$, approximation de la solution sur une base polynômiale $\Phi_k(x)=(x-L)^k$, *k=0,1,2,3.*

Comparer la solution obtenue avec la solution exacte aux points $X_1=0{,}5$, $X_2=1$ et $X_3=2$.

2- Méthode de Collocation par points :

Utiliser la méthode de collocation par points pour résoudre le système (S) avec les mêmes conditions que celles de la question II-1, en prenant en compte les données complémentaires suivantes : $u(x_1=1)=25$ et $u(x_2=1{,}5)=22{,}5$ et en supposant : a) $p(x)=10$, b) $p(x)=e^{u(x)}$