MN41

Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur

UTBM le 26 Juin 2013 *Examen Final* *SA-NL-NH-SD*

Résumé de cours autorisé

****

I - Résidus pondérés : Méthode de Galerkin :

Utiliser le principe de Galerkin pour déterminer la solution approchée du système suivant :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u(x) = \sin(ax) \qquad 0 < x < 4 \;, \qquad a \text{ réel}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{en } x=0 \quad et \quad u(x) = 0 \quad \text{en } x=4$$

L'approximation de la solution sera développée sur une base trigonométrique adaptée. Commencer par une approximation à *2* termes puis généraliser à *n* termes.

II- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + p(x) = 0 \qquad 0 < x < L\,,$$

$$-k\frac{du}{dx} = U_0' \quad \text{en } x=0 \qquad et \qquad u(x) = U_L \quad \text{en } x=L$$

U'_0, U_L sont des constantes connues. $k(x)$ et $p(x)$ sont des fonctions connues traduisant respectivement une propriété physique et une action extérieure sur le système.
$u(x)$ est l'inconnue du problème que l'on cherche à approcher par éléments finis.

1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.
2) Le domaine de longueur L est divisé en trois éléments définis dans l'ordre par ($k(x)=k_1$, $p(x)=p_1$, longueur L_1), ($k(x)=k_2$, $p(x)=ax+b$, longueur L_2), ($k(x)=k_3$, $p(x)=p_3$, longueur L_3). Calculer les matrices élémentaires en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin.
3) Assemblez les trois éléments et déterminer la solution aux nœuds inconnus.
AN. : $U_L=5$, $U'_0=10$, $p_1=10$, $p_3=100$, $k_1=100$, $k_2=50$, $k_3=20$, $L_1=L_3=1$, $L_2=2$, a et b sont des constantes à déterminer pour assurer la continuité de $p(x)$ sur tout le domaine.

III- Eléments finis 2D

Résoudre par éléments finis le problème elliptique : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0$ sur le domaine rectangulaire, présenté ci-dessous, divisé en deux éléments triangulaires repérés par les nœuds (1,2,3) pour le premier et (3,4,1) pour le second. Les coordonnées des nœuds sont indiquées sur la figure et les nœuds 1 et 3 aux extrémités de l'interface des deux triangles sont supposés connus, $U_1=1$ et $U_3=10$.