MN41

Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur

UTBM le 12 Janvier 2014 *Examen Final* *S. Abboudi, N. Labed*

Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

EDO $\frac{d}{dx}(k\frac{du}{dx}) + a\,u(x) + P = 0 \qquad 0 < x < L\,, \qquad (1)$

CL $u(0) = U_0$ en $x=0$ *et* $-k\frac{du}{dx}(L) + u(L) = q$ en $x=L \qquad (2)$

a , q , k , U_0, L *et* P sont des constantes connues.

AN : $q = 100$, $k = 1$, $U_0 = 10$, $L = 3$, $P=20$.

a) Etude du cas a=0

1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.

2) Calculer les matrices élémentaires de deux éléments finis des longueurs respectives $L_1=2L/3$ et $L_2=L/3$ en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin sur chaque élément.

3) Assembler les deux éléments et calculer la solution aux nœuds des éléments en fonction du paramètre *b*.

4) Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte.

b) Etude du cas a=1

Reprendre les questions 1), 2) et 3) en supposant a=1.

II - Eléments finis 2D

On considère l'EDP elliptique suivante :

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et les conditions limites suivantes : $u(0,0) = U_A$ et $u(1,-1) = U_D$

Le domaine *D* est composé de l'assemblage de deux triangles ABC et ACD de coordonnées *A(0,0), B(1,1), C(2,0)* et *D(1,-1).*

1) Ecrire les deux matrices élémentaires en respectant la localisation de chaque élément.

2) Assembler les deux systèmes et déterminer la solution aux nœuds inconnus.

AN : $U_A = 10$, $U_D = 100$.

III – Résidus pondérés avec approximation trigonométrique

Calculer une solution approchée en utilisant une pondération du résidu de type Galerkin, pour résoudre le système suivant :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u\,(x) + P = 0$$

$$u(0) = 0 \text{ en } x=0 \qquad et \qquad u(L) = 0 \text{ en } x=L$$

On suppose que la solution approchée s'écrit : $\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega_k\, x)$