

MN41
Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur

UTBM le 11 Janvier 2016

Examen Final

S. Abboudi, N. Labed

Résumé de cours autorisé

I- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

$$EDO \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + u(x) + P = 0 \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

$$CL \quad -k \frac{du}{dx}(0) + u(0) = Q \text{ en } x=0 \quad u(L) = U_L \text{ en } x=L \quad (2)$$

Q, k, U_L, L et P sont des constantes connues, $Q = 50, k = 3, U_L = 10, L = 3, P = 150$.

- 1) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.
- 2) On décompose le domaine de calcul en trois éléments finis de même longueur. Ecrire les matrices élémentaires en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin sur chaque élément.
- 3) Assembler les trois éléments et calculer la solution aux nœuds des éléments.
- 4) Comparer le résultat obtenu sur chaque nœud avec la solution exacte.

II - Eléments finis 2D

On considère l'EDP elliptique suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans le domaine } D \quad (3)$$

Le domaine D est composé de deux éléments triangulaires ABC et BDC de coordonnées $A(-1,0), B(0,0), C(0,1)$ et $D(a,0), a$ étant un paramètre réel positif.

On notera $U_A = 100$ et $U_D = 10$ les valeurs de u imposées aux nœuds A et D .

- 1) Ecrire les deux matrices élémentaires en respectant la localisation de chaque élément.
- 2) Ecrire le système global (assemblage des deux triangles) en fonction de a .
- 3) Calculer la solution aux nœuds inconnus pour $a=1, a=5$ puis $a=10$.

III – Résidus pondérés

Calculer une solution approchée du système ci-dessous, en utilisant une approximation trigonométrique à **trois termes** et une pondération du résidu de type Galerkin :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u(x) = 10 \quad a < x < b \quad (4)$$
$$u(a) = 0 \text{ en } x=a \quad \text{et} \quad u(b) = 0 \text{ en } x=b$$

- 1) Le domaine de résolution est défini par : $a = -L/2, b = L/2, L = 1$
- 2) Expliquer brièvement ce qui change si : $a = 0, b = L, L = 1$.