Résumé de cours autorisé

****

I- Eléments finis 1D

On considère le système suivant :

EDO $\quad \dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{du}{dx}\right) + a\,u(x) + P = 0 \qquad 0 < x < L\,, \qquad (1)$

CL $\quad -k\dfrac{du}{dx}(0) + hu(0) = \varphi_1 \qquad$ en $x=0 \qquad (2)$

$\quad -k\dfrac{du}{dx}(L) = \varphi_2 \qquad$ en $x=L \qquad (3)$

φ_1, φ_2, k, h,, L, a *et* P sont des constantes connues.

1) Déterminer, en fonction du signe de a, la solution exacte du système ci-dessus en supposant : $\varphi_1 = 100$, $\varphi_2 = 200$, $k = 100$, $h = 10$, $L = 1$, $P=50$.

2) Ecrire les formes variationnelles globale et faible du système.

3) Détailler le calcul des matrices élémentaires de deux éléments finis de longueurs respectives L_1 et L_2 en utilisant une approximation nodale linéaire et une pondération du résidu de type Galerkin sur chaque élément.

4) Assembler les deux éléments et écrire le système global à résoudre.

5) Résoudre ce système dans le cas $a=0$ en supposant $L_2 = 2L_1$.

6) Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte sur chaque nœud et au milieu de chaque élément.

7) Résoudre à nouveau ce système dans le cas $a=0$ et $h=0$, expliquer.

II – Méthode des moindres carrés

Utiliser la méthode des moindres carrés, basée sur une approximation polynômiale de la solution, limitée à 4 termes, pour résoudre le système ci-dessus avec $a=-1$, en utilisant les mêmes données numériques pour la résolution.

III - Eléments finis 2D

On considère l'EDP elliptique suivante : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ définie sur le domaine composé de l'assemblage de deux triangles ABC et BCD de coordonnées $A(-2,0)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$ et $D(1,0)$.

Les variables nodales U_A et U_D aux nœuds A et D sont supposées connues.

1) Ecrire les deux matrices élémentaires en respectant la localisation de chaque élément.

2) Assembler les deux systèmes et déterminer la solution aux nœuds inconnus.

AN : $U_A = 50$, $U_D = 10$.