MN42 : ANALYSE NUMERIQUE ET SIMULATION

UTBM - GESC
Semestre d'Automne 2006
(18/01/07)

Examen Final

(durée: 2 heures)

Exercice 1

Soit f une fonction définie par un nuage de $(n+1)$ points $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \ldots\ (x_n, f(x_n))$. On cherche à déterminer le polynôme $P_n(x)$, de degré n, d'interpolation de $f(x)$ qui passe par ces points en utilisant la méthode de Newton.

1. Ecrire l'expression du coefficient a_n de plus haut degré de $P_n(x)$, appelé différence divisée.
2. Donner la relation de récurence entre le polynnôme $P_n(x)$ et le polynôme $P_{n-1}(x)$ de degré $(n-1)$ passant par les n premiers points. Quelle est la valeur de $P_0(x)$.
3. Montrer pour le cas de trois points que l'on a la relation suivante entre les différences divisées:
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$
4. Application: Construire la table des différences divisées, puis déterminer le polynôme d'interpolation d'une fonction f définie par les points donnés dans le tableau suivant:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	3
$f(x_i)$	91	18	-2	186

Exercice 2

Soit f une fonction continue et de dérivée première continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour l'intégration de f sur $[0, 1]$, on considère la formule de quadrature :

$$\int_0^1 f(x)dx = A_1.f(0) + A_2.f'(0) + A_3.f(\alpha) \tag{1}$$

où f' est la dérivée première de f, $\alpha \in]0, 1[$ et $A_1,\ A_2,\ A_3$ sont des constantes réelles.

1. Calculer $A_1,\ A_2,\ A_3$ et α pour que la formule d'intégration (1) ait le plus grand degré de précision possible.
2. Si n est le degré de précision trouvé pour la formule (1), calculer l'erreur d'intégration pour $f(x) = x^{n+1}$.
3. Par un changement de variable convenable, construire à partir de la formule d'intégration (1), une deuxième formule pour calculer sur un intervalle $[a, b]$ quelconque
$$\int_a^b f(x)dx$$
4. En utilisant cette deuxième formule, calculer une valeur approchée pour
$$\int_0^{10} \exp(-\frac{x}{5})dx.$$
Calculer la valeur exacte de cette intégrale puis donner l'erreur absolue commise.
5. On utilise maintenant la méthode de Simpson composée pour calculer cette intégrale, pour cela on divise l'intervalle $[0, 10]$ en n sous intervalles égaux de longueur h. Quelle est la valeur minimale de n qui donne une erreur d'intégration inférieure ou égale à celle obtenue en 4°)

Exercice 3
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = -xy^2 + 4x^3 + 2 \quad \forall\, x \in [0,1] \\ y(0) = y_0 = 2 \end{cases}$$

que l'on cherche à résoudre numériquement en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4, en prenant un pas $h = 0,1$.

1. Déterminer la solution exacte $y_{ex}(x)$ de cette équation différentielle et calculer ces valeurs $y_{ex}(x_i)$ pour $x_i = ih,\ i = 1,\ 2,\ 3.$

2. Ecrire et appliquer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour déterminer les valeurs approchées $y_i = y(x_i)$ pour $x_i = ih,\ i = 1,\ 2,\ 3.$

3. Calculer l'erreur relative commise pour chacun de ces trois pas.