MN42 : ANALYSE NUMERIQUE ET SIMULATION

UTBM - GESC
Semestre d'Automne 2006
(07/11/06)

Examen Médian
(durée: 2 heures)

Exercice 1

Soit à résoudre le système linéaire (S) : $A.\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$

1. On prend dans un premier temps

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

   En appliquant la méthode de substitution de Gauss pour résoudre ce système, expliciter les matrices obtenues à chaque étape de la méthode puis donner le vecteur solution du système.

2. On suppose maintenant que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -10 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -15 \\ 3 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$$

   et on cherche à résoudre le système (S) en appliquant la méthode de Gauss-Seidel.

   a- Ecrire les composantes du vecteur $\underline{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ à l'itération $(k+1)$.

   b- En prenant $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, calculer les vecteurs $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ et $\underline{\mathbf{x}}^{(3)}$.
   La méthode peut-elle conerger? Pourquoi?

   c- Proposer une modification simple du système qui conduise à la convergence de cette méthode à partir de $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$. Pour confirmer votre réponse, calculer le vecteur solution obtenu à la cinquième itération .

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une racine positive a. Localiser cette racine dans un intervalle de longueur unité.

2. Pour déterminer cette racine, on applique l'algorithme du point fixe à l'équation :

$$x = g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}$$

   Etudier la convergence de cet algorithme.

3. S'il y'a convergence, quel est son ordre.

4. Donner des approximations de la solution et du taux de convergence après dix itérations initialisées par $x^{(0)} = 1$.

.../...

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = x^2 exp(-x^2)$.
L'équation $f(x) = 0$ possède la racine $a = 0$, que l'on cherche à retrouver en utilisant la méthode de Newton.

1. Ecrire le processus itératif de Newton pour cette équation.
2. Ce processus converge-t-il vers la racine $a = 0$ s'il est initialisé par $x^{(0)} = 2$.
3. Déterminer un intervalle où ce processus doit être initialisé pour qu'il converge vers la racine $a = 0$.
4. quel est dans ce cas l'ordre de convergence de la méthode.