NOTES DE COURS, TD ET TP AUTORISÉES

TRANSFERT THERMIQUE CONDUCTIF

Question 1 (0.25 point) :

On considère un triangle T de sommets $N_I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$, $N_{II}\begin{pmatrix} x_{II} \\ y_{II} \end{pmatrix}$ et $N_{III}\begin{pmatrix} x_{III} \\ y_{III} \end{pmatrix}$ (fig. 1). Rappeler la formule de la transformation affine reliant ce triangle au triangle de référence ainsi que la formule donnant la surface S du triangle en fonction de la matrice Jacobienne.

Question 2 (0.5 point) :

On considère un triangle T_a de sommets $N_I^a\begin{pmatrix} a\,x_I \\ a\,y_I \end{pmatrix}$, $N_{II}^a\begin{pmatrix} a\,x_{II} \\ a\,y_{II} \end{pmatrix}$ et $N_{III}^a\begin{pmatrix} a\,x_{III} \\ a\,y_{III} \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel strictement positif. Montrer que T_a est bien un triangle, c'est-à-dire que les sommets N_I^a, N_{II}^a et N_{III}^a ne sont pas alignés.

Question 3 (0.5 point) :

Calculer la surface S_a du triangle T_a en fonction de la surface S du triangle T et du nombre réel a.

Question 4

On considère un problème stationnaire de conduction de chaleur en **2D-axisymétrique** dans un matériau isotrope de conductivité 10 W/(m °C). Le maillage est constitué de quatre éléments triangulaires E_1, E_2, E_3, E_4 et de six nœuds N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 (fig. 2). La structure est soumise à une source interne de chaleur volumique uniforme $\overline{q}$=100 W/m^3. Une température connue $\overline{T}$ est imposée aux nœuds 1, 2, 3, 4 et 6. En respectant la convention de numérotation locale donnée sur la figure 3, calculer les températures aux nœuds du maillage dans les deux cas suivants :

4a) 0.25 point : $N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $N_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $N_4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $N_5\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $N_6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overline{T}$ = 5 °C

4b) 2.5 point : $N_1\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$; $N_2\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$; $N_3\begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix}$; $N_4\begin{pmatrix} 0 \\ 3a \end{pmatrix}$; $N_5\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix}$; $N_6\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$; $\overline{T}$ = 5a^2 °C, a étant un nombre réel strictement positif.

TRANSFERT THERMIQUE RADIATIF

On considère un transfert stationnaire radiatif de chaleur dans une enceinte fermée carrée dont la longueur *l* est supposée grande devant l'épaisseur $e=10^{-2}$ m (fig. 4). L'émissivité ε_1 des surfaces horizontales S_1 et S_3 est égale à 0.9 et l'émissivité ε_2 des surfaces verticales S_2 et S_4 est égale à 0.8. Dans les parois de l'enceinte, la chaleur est transportée par conduction avec un matériau **orthotrope** de conductivité $k_x=5$ et $k_y=10$ W/(m °C). Le problème posé est un problème plan. La structure est soumise à une température $\overline{T}=293.15$ °K sur ses faces latérales et à un flux $\phi=10^3$ W/m^2 sur ses faces inférieure et supérieure. On rappelle que la constante de Stefan-Boltzmann est égale à $5.67\ 10^{-8}$ W/(m^2 °K^4).

Question 1 (1 point)

On admettra que, dans le plan, le facteur de forme *F* entre deux lignes **adjacentes** et de même longueur *l* est donnée par la formule : $F = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ où α représente l'angle entre les deux lignes (fig. 5). Calculer les facteurs de forme F_{11}, F_{12}, F_{13} et F_{14}.

Question 2 (2 point)

En se plaçant au milieu des surfaces S_1 et S_2, écrire les deux équations de transfert radiatif. En déduire une relation entre les flux ϕ_1 et ϕ_2 perdus par S_1 et S_2.

Question 3 (1 point)

En se plaçant au milieu des surfaces S_1 et S_2, écrire les deux équations de transfert conductif. En déduire la température T_2 dont la localisation est donnée sur la fig. 6.

Question 4 (1 point)

Calculer les températures T_0 et T_1 dont la localisation est donnée sur la fig. 6.

Question 5 (1 point)

Comparer et commenter vos résultats par rapport à des résultats numériques obtenus à l'aide d'un code de calcul aux éléments finis (tableau 1).

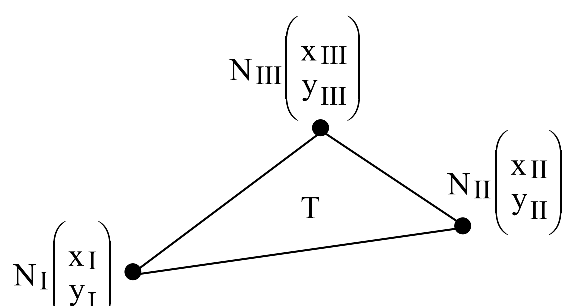


Figure 1 – Triangle T

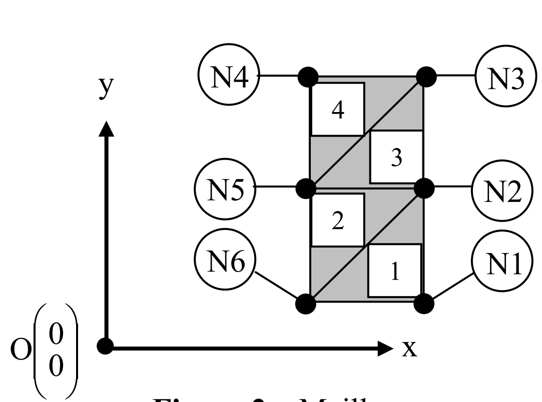


Figure 2 – Maillage

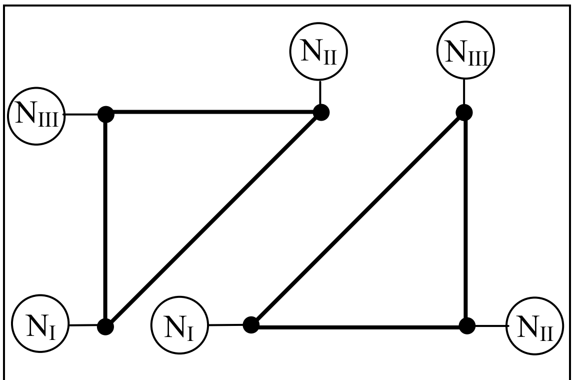


Figure 3 – Numérotation locale

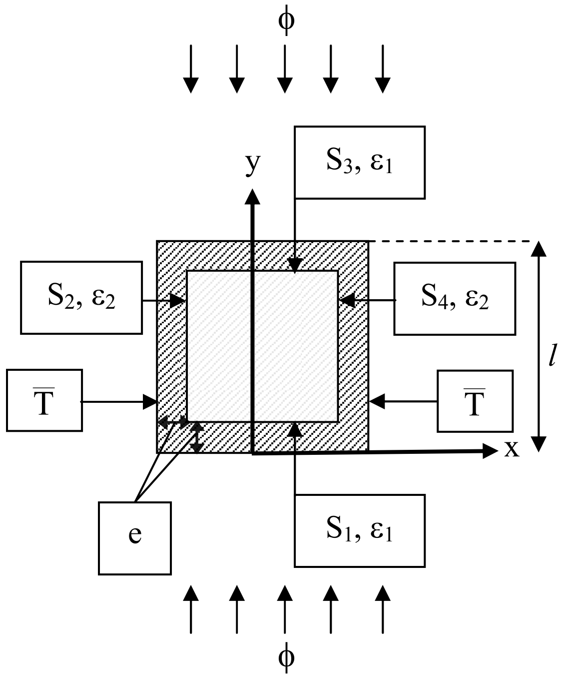


Figure 4 – Enceinte radiative

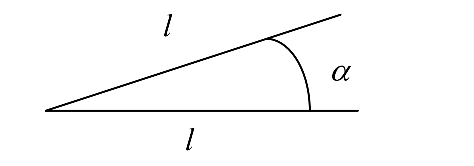


Figure 5 – Facteur de forme

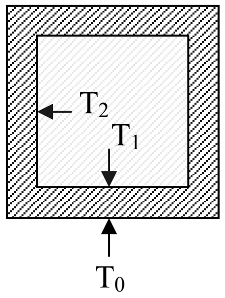


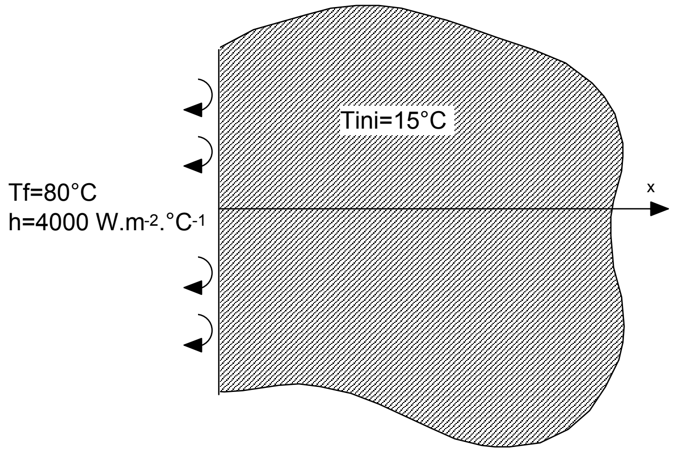
Figure 6 – Position des températures à calculer

l (m)	T_0 (°K)	T_1 (°K)	T_2 (°K)
0.5	437.7	436.74	294.36
2	456.88	455.88	294.91
3.4	458.87	457.87	294.98

Tableau 1 – Températures calculées par éléments finis

CONDUCTION THERMIQUE EN REGIME TRANSITOIRE - CAS D'UN MILIEU SEMI-INFINI AVEC ECHANGE CONVECTIF (10 points).

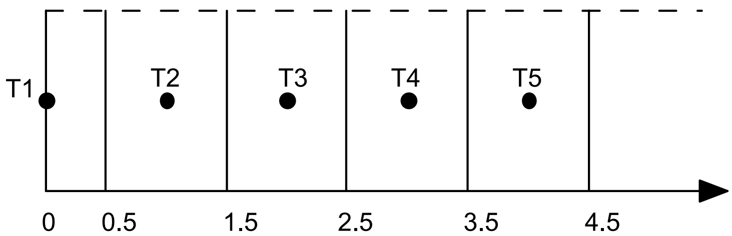
Problème : Un solide semi-infini en acier inoxydable est initialement à 15°C ($T(x,0s)=15$). A t=0s, le solide est mis en contact avec un fluide dont la température est de 80°. Il subit alors un échange thermique convectif sur sa surface avec un coefficient d'échange de 4000 $W.m^{-2}°C^{-1}$.



Données acier inox:
λ=16 $W.m^{-1}°C^{-1}$
ρ=8000 $kg.m^{-3}$
C=500 $J.kg^{-1}.°C^{-1}$

Numérique:
- Considérer une profondeur de 4.5 mm.
- Utiliser 5 volumes (dont le premier sera un demi-volume).

Représentation:



1) Déterminer le système (5 équations) permettant de calculer $T(x_i,0.05s)$ à partir de $T(x_i,0s)$ suivant un schéma d'intégration temporelle de type explicite.
Mettre le problème sous la forme :
$$[T_{j+1}]=[B][T_j]+[S]$$
Où j représente l'indice temporel.
Exprimer les matrices $[B]$ et $[S]$ en fonction de quelques coefficients que vous expliciterez.
Donner les valeurs numériques de chaque coefficient puis calculer $T(x_i,0.25s)$ en réalisant 5 pas de temps de 0.05s.
(Rq: vous utiliserez une surface unitaire suivant la normale à x).

2) Déterminer le système (5 équations) permettant de calculer $T(x_i,0.05s)$ à partir de $T(x_i,0s)$ suivant un schéma d'intégration temporelle de type Crank-Nicholson. La condition de convection sera prise en compte en accord avec le schéma.
Mettre le problème sous la forme :
$$[A][T_{j+1}]=[B][T_j]+[S]$$
Exprimer les matrices $[A],[B]$ et $[S]$ en fonction des coefficients définis précédemment. Calculer $T(x_i,0.25s)$ en réalisant 5 pas de temps de 0.05s.