N.B. : **Durée de l'examen : 2 heures ; Notes de cours, de TD et de TP autorisées**
Chaque problème est à rendre sur une feuille séparée

THERMIQUE

I PROBLÈME DE THERMIQUE – CONDUCTION (7 POINTS)

On considère un problème de conduction de chaleur **monodimensionnelle** (1 D) dans une barre de 1 m de long (fig. 1). On fera les hypothèses qu'il n'y a pas de couplage avec la mécanique, pas de convection, pas de radiation et pas d'effets transitoires. Le matériau est supposé homogène et isotrope. La température est notée T, la conductivité k est égale à 10 W/(m °C) et la source interne de chaleur r est égale à 100 W/m^3. On considèrera les conditions aux limites en température : $T(x=0)=0$°C ; $T(x=1)=5$°C.

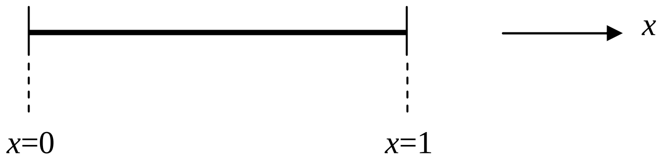


Figure 1

1) Ecrire l'équation différentielle de diffusion de la chaleur. Intégrer **analytiquement** cette équation. Utiliser les conditions aux limites pour déterminer complètement $T(x)$.

2) L'objectif de cette question est de calculer **numériquement** la température $T(x)$ dans la barre de la figure 1. On utilisera pour cela la méthode des éléments finis. On notera Ω l'intervalle [0,1].

   2.1 Remplacer les points d'interrogation ??? dans l'équivalence (1) par l'expression mathématique adéquate **en justifiant** votre réponse.

$$\int_\Omega \left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r \right) \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega k \frac{\partial T}{\partial x} ??? \, dx = \int_\Omega r \, \psi \, dx \quad \forall \psi \tag{1}$$

   2.2 On introduit dans (1) une approximation de type éléments finis en considérant un maillage comprenant n nœuds. $\underline{T}$ et $\underline{\psi}$ (vecteurs de dimension n x 1) représentent les valeurs nodales, respectivement pour la température T et pour la fonction test ψ. Remplacer les points d'interrogation ??? dans l'équation (2) par les expressions mathématiques adéquates **en justifiant** votre réponse.

$$\underline{\psi}^T \underbrace{\left(\int_\Omega k \underbrace{\underline{\underline{???}}}_{n \text{ x } 1} \; \underbrace{\underline{\underline{???}}}_{1 \text{ x } n} dx \right)}_{\underline{\underline{K}} \,:\, n \text{ x } n} \underline{T} = \underline{\psi}^T \underbrace{\left(\int_\Omega r \underbrace{\underline{\underline{???}}}_{n \text{ x } 1} \, dx \right)}_{\underline{b} \,:\, n \text{ x } 1} \quad \forall \underline{\psi} \tag{2}$$

   2.3 On note $\underline{\underline{K}}$ la matrice de conductivité assemblée figurant dans l'équation (2), $\underline{\underline{A_e}}$ la matrice n x 2 qui assure la connectivité entre les numérations locale et globale des nœuds de l'élément e et m le nombre d'éléments du maillage. Remplacer les points d'interrogation ??? dans l'équation (3) par les expressions mathématiques adéquates **en justifiant** votre réponse.

$$\underline{\underline{K}} = \sum_{e=1}^{m} \underline{\underline{A_e}} \underbrace{\left(\int_e k \underbrace{[???]}_{2 \text{ x } 1} \; \underbrace{[???]}_{1 \text{ x } 2} dx \right)}_{\underline{\underline{k_e}} \,:\, 2 \text{ x } 2} \underline{\underline{A_e}}^T \tag{3}$$

2.4 On note $\underline{b}$ le second membre assemblé figurant dans l’équation (2). Remplacer les points d’interrogation ??? dans l’équation (4) par l’expression mathématique adéquate **en justifiant** votre réponse.

$$\underline{b} = \sum_{e=1}^{m} \underline{\underline{A_e}} \underbrace{\left(\int_e r \underbrace{[???]}_{2 \times 1} \; dx \right)}_{\underline{b_e} \, : \, 2 \times 1} \qquad (4)$$

2.5 On note $N_{\text{I}}(x)$ et $N_{\text{II}}(x)$ les fonctions de forme sur l’élément $e=[a,b]$. Les deux sommets de cet élément sont notés I et II (fig. 2). Calculer $N_{\text{I}}(x)$ et $N_{\text{II}}(x)$.

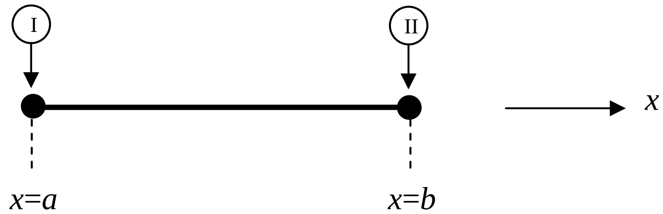


Figure 2

2.6 Calculer la matrice $\underline{\underline{k_e}}$ figurant dans l’équation (3).

2.7 Calculer le vecteur $\underline{b}_e$ figurant dans l’équation (4).

2.8 On considère un maillage comprenant 3 éléments linéaires et 4 nœuds (fig. 3). Assembler la matrice $\underline{\underline{K}}$ et le second membre $\underline{b}$. On prendra pour cela la convention de numérotation locale indiquée sur la figure 2.

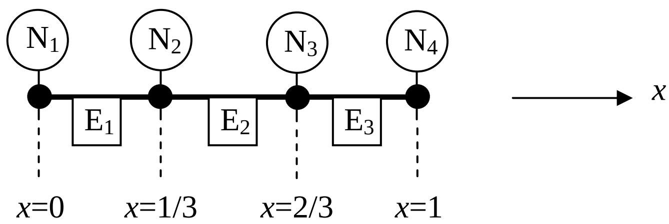


Figure 3

2.9 **En détaillant les étapes du calcul,** inverser le système linéaire qui résulte de la question 2.8) et calculer les températures nodales T_2 et T_3.

2.10 Comparer les résultats des questions 1) et 2.9).

2.11 Comparer les résultats des questions 1) et 2.9) avec ceux du tableau 1 qui ont été obtenus en utilisant l’élément barre LINK32 du logiciel ANSYS.

$T(x=1/3)=2.7778$	$T(x=2/3)=4.4444$

Tableau 1

II PROBLÈME DE THERMIQUE – RADIATION (4 POINTS)

On considère un problème 2D plan avec une structure constituée de deux enceintes séparées par de la matière (fig. 4). Dans la matière, on ne considèrera que du transfert thermique en conduction avec une conductivité de 50 W/(m °K). Dans les enceintes, on ne considèrera que du transfert thermique radiatif. Chaque enceinte est constituée de quatre surfaces rayonnant entre elles. Les surfaces de l'enceinte du bas ont une émissivité ε_1=0.9 et celles du haut une émissivité ε_2=0.8. La face inférieure de la structure est soumise à un flux imposé ϕ égal à 100 W/m^2 et la face supérieure à une température imposée $\overline{T}$ égale à 293 °K. On rappelle que la constante de Stefan-Boltzmann est égale à 5.67 10^{-8} W/(m^2 °K^4). On supposera pour les calculs que la largeur L de la structure est très grande devant l'épaisseur e (e=1 m).

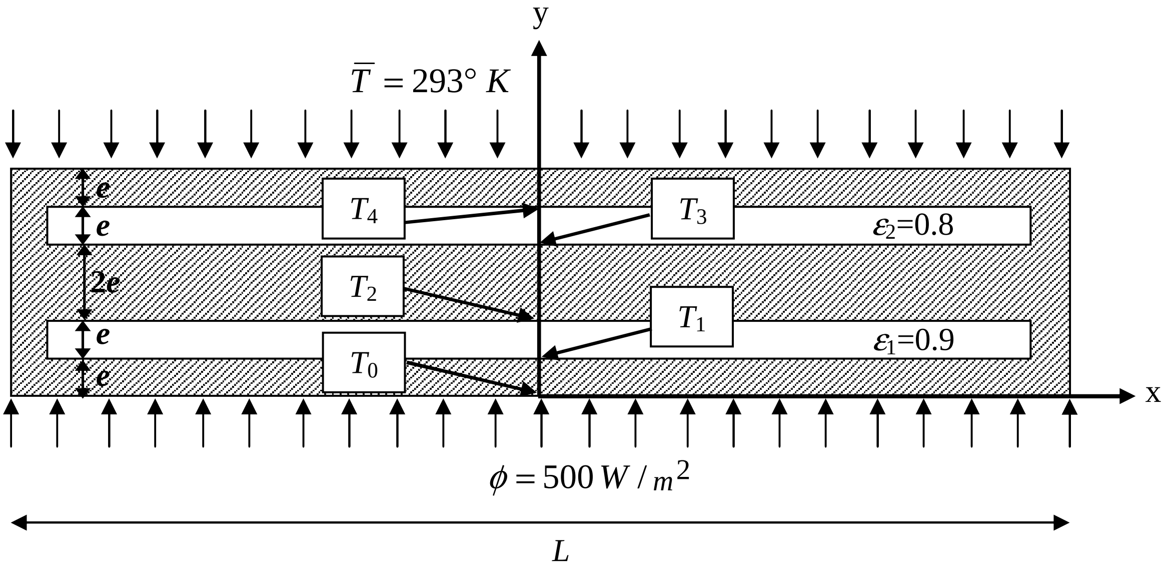


Figure 4

1) Calculer analytiquement les températures T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4 au centre de la structure (cf. fig. 4).

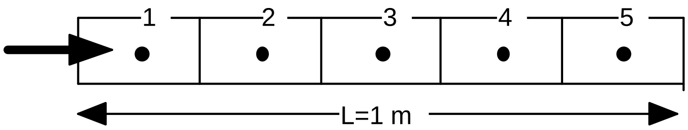
2) Comparer les températures obtenues à la question précédente avec celles contenues dans le tableau 2. Ces dernières ont été obtenues à l'aide du logiciel ANSYS. Commenter.

L (m)	T_0 (°K)	T_1 (°K)	T_2 (°K)	T_3 (°K)	T_4 (°K)
10	323.82	322.08	309.62	307.19	294.05
50	338.18	336.19	321.18	317.27	294.94
100	338.86	336.86	321.8	317.82	294.99

Tableau 2

MECANIQUE DES FLUIDES – EVOLUTION D'UNE CONCENTRATION (10 POINTS)

Problématique : Ecoulement réactif dans un tube.
On souhaite étudier l'évolution de la concentration C (g/kg) d'un constituant à l'intérieur d'un tube dans lequel circule un fluide.
A l'entrée du tube, la concentration du composant en question est nulle.



Le tube sera discrétisé spatialement comme ci-dessus à l'aide de 5 éléments de volume.

L'équation qui régit le transport du constituant C est la suivante :

$$\rho V \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D \frac{\partial C}{\partial x}\right) = S(C)$$

Avec $S(C) = G * (5 - C)$ où G est une constante.

Calculs :
Déterminer l'évolution de la concentration C du constituant suivant l'axe du tube.
Vous utiliserez tout d'abord le schéma amont pour discrétiser le terme convectif (cas n°1).
Dans un second calcul (cas n°2), le schéma LUS sera appliqué au lieu du schéma amont.
Dans les 2 cas, vous mettrez le problème sous la forme :

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ C \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ B \\ \\ \end{bmatrix}$$

Où $[A]$ sera une matrice 5x5 et $[C]$ et $[B]$ 2 vecteurs.
Vous exprimerez les coefficients de $[A]$ et $[B]$ en fonction de quelques grandeurs qui seront explicitées.

Données :
Longueur du tube : 1 m.
Diamètre du tube : 10 mm.
Masse volumique: ρ=1000 kg/m^3.
Coefficient de diffusion : D=10^{-4} m^2/s.
Terme de production : G=40 kg.m^{-3}.s^{-1}.
Vitesse de l'écoulement : V=10 mm.s^{-1}.
Concentration initiale : C_e=0 g/kg.

Remarques :
Ici, la variable n'est pas la température (comme nous l'avons vu en TD) mais la centration C et le coefficient de transport n'est donc pas la conductivité thermique mais le produit ρD.
Concernant le terme source, la partie proportionnelle à C devra être transférée à gauche dans le système d'équations établi.
Pour simplifier les termes de la matrice, on pourra prendre une section unitaire au lieu de πR^2.

Schéma LUS :
Suivant le schéma LUS, C_{34} s'exprime $C_{34} = \frac{3}{2}C_3 - \frac{1}{2}C_2$

au lieu de $C_{34} = C_3$ pour le schéma amont.