

N.B. : Durée de l'examen : 2 heures ; Notes de cours, de TD et de TP autorisées
 Chaque problème est à rendre sur une feuille séparée

Méthode des volumes finis en transfert thermique et mécanique des fluides

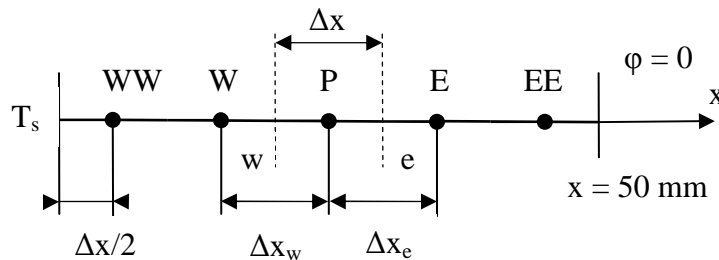
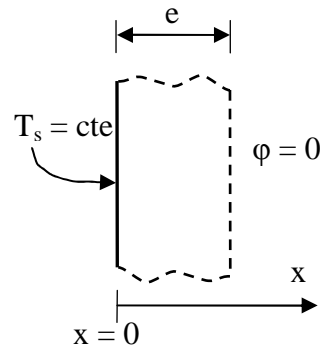
A] (8 points) :

On considère un domaine se comportant comme un milieu semi infini, c'est-à-dire comme un milieu dont l'épaisseur est suffisamment grande pour qu'une perturbation sur une face ne soit pas immédiatement ressentie à une profondeur donnée. La température initiale du milieu est uniforme : $T^0 = 20^\circ\text{C}$.

Brutalement, la température de la surface d'abscisse $x = 0$ est portée à $T_s = 800^\circ\text{C}$ et reste constante pendant l'intervalle de temps considéré. On supposera que durant cet intervalle, le flux thermique surfacique ϕ est nul pour $x = e = 50 \text{ mm}$.

Le milieu a les caractéristiques suivantes : une conductivité thermique $\lambda = 100 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, une capacité thermique massique $c = 500 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et une masse volumique $\rho = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$.

L'objectif est de déterminer la distribution de température sur une profondeur de 50 mm au bout d'une durée fixée. Pour cela, on discrétise cette partie du domaine suivant son épaisseur à l'aide de 5 volumes identiques de largeur $\Delta x = 10 \text{ mm}$ de la façon suivante :



- 1) On envisage de traiter le problème avec un schéma explicite avec un pas de temps $\Delta t = 5\text{s}$. Est-ce un choix judicieux ?
- 2) On décide finalement d'utiliser un schéma explicite avec un pas de temps $\Delta t = 1\text{s}$ pour obtenir la distribution de température aux différents nœuds au bout de 3s. Pour cela,
 - énoncer sous forme analytique le jeu d'équations,
 - formuler ce système sous forme matricielle toujours sous forme analytique,
 - calculer la valeur numérique des coefficients intervenants dans les matrices,
 - proposer vos résultats numériques pour chaque pas de temps jusqu'à $t = 3\text{s}$.
- 3) Reprendre le problème avec un schéma implicite avec le même pas de temps $\Delta t = 1\text{s}$ en suivant le même déroulement.
- 4) Comparer les deux distributions obtenues avec la solution analytique qui donne à $t = 3\text{s}$:

	T_{WW}	T_W	T_P	T_E	T_{EE}
$T(^{\circ}\text{C})$	552,8	192,1	52,2	23,3	20,2

B] (2 points) :

Expliquer brièvement le principe de l'algorithme SIMPLE puis en présenter les différentes étapes.

PROBLÈME DE THERMIQUE EN CONDUCTION (5 points)

On considère un problème de conduction isotrope, **en 2D-axisymétrique**, stationnaire, sans convection et sans couplage avec la mécanique. La structure à étudier est modélisée par un maillage comportant 2 éléments triangulaires et 4 nœuds (figure 1). Les coordonnées sont paramétrées par les nombres a , b et c **comme indiqué sur la figure 1**. Trois températures notées \bar{T}_1 , \bar{T}_2 et \bar{T}_4 sont imposées aux nœuds 1, 2 et 4. Chaque élément est constitué d'un matériau différent de conductivité k_1 et k_2 ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) et est soumis à une source interne de chaleur (W/m^3) différente \bar{q}_1 et \bar{q}_2 . **En respectant impérativement** la convention de numérotation locale de la figure 2 :

- 1) Calculer les matrices de conductivité élémentaires en fonction de a , b , c , k_1 et k_2 .
- 2) Assembler la matrice de conductivité en fonction de a , b , c , A_1 et A_2 ($A_1 = \frac{k_1}{3b}$; $A_2 = (a + \frac{c}{3})\frac{k_2}{2bc}$).
- 3) Calculer les seconds membres élémentaires en fonction de a , b , c , \bar{q}_1 et \bar{q}_2 .
- 4) Assembler le second membre en fonction de B_1 et B_2 ($B_1 = \frac{ab\bar{q}_1}{24}$; $B_2 = \frac{bc\bar{q}_2}{24}$).
- 5) Résoudre le système linéaire associé au modèle élément fini et exprimer la solution en fonction de a , b , c , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , \bar{T}_1 , \bar{T}_2 et \bar{T}_4 .

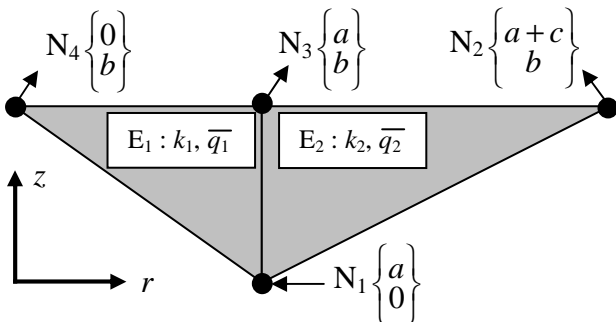


Figure 1 – Maillage

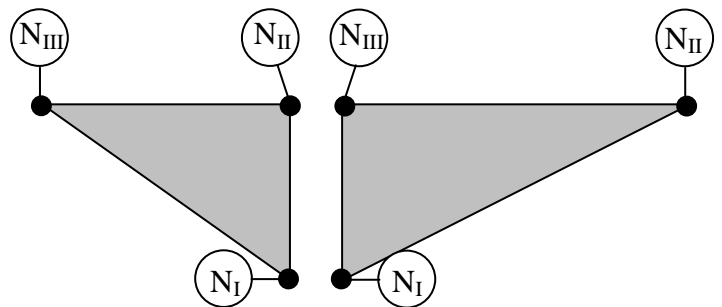


Figure 2 – Convention de numérotation locale

PROBLÈME DE THERMIQUE EN RADIATION (10 points)

- 1) On considère deux surfaces S_1 et S_2 adjacentes et perpendiculaires (fig. 3). La première a une largeur finie L dans la direction x mais est infinie dans la direction z . La seconde est de dimension finie H et Z dans les directions y et z . On note r la distance entre deux points quelconques M_1 et M_2 de ces deux surfaces. n_1 et n_2 désignent les normales aux deux surfaces et qui sont associées à ces deux points. θ_1 et θ_2 représentent les angles que forment les normales avec le segment de longueur r qui joint les deux points. Les coordonnées x , y , z_1 et z_2 des points M_1 et M_2 sont indiquées sur la figure 3.

A l'aide des informations géométriques contenues dans le dessin de la figure 3, calculer la quantité $\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{r^2}$ en fonction de x , y , z_1 et z_2 .

2) On rappelle que le facteur de forme entre les surfaces S_2 et S_1 est défini par :

$$F_{21} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{HZ} \left(\int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} \right) \left(\int_0^H \int_{-Z/2}^{Z/2} \right) \frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{r^2} (dx dz_1)(dy dz_2)$$

Montrer que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]^{3/2}} dz_1 = \frac{\pi}{2} \left[x^2 + y^2 \right]^{-3/2}.$$

Indication : on pourra faire les changements de variables successifs : $p = z_1 - z_2$, $q = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et enfin

$q = \tan(\theta)$. On rappelle que : $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$.

3) Dédurre des questions 1 et 2 que $F_{21} = \frac{1}{2} \left[1 + s - \sqrt{1 + s^2} \right]$ où on a posé $s = \frac{L}{H}$.

4) Expliquez pourquoi la formule de la question 3) reste valable lorsque la surface S_2 devient elle aussi infinie dans la direction z .

5) On considère un transfert stationnaire radiatif de chaleur au sein d'une cavité rectangulaire de base L et de hauteur H (fig. 4). Le problème est 2D-plan, ce qui signifie que l'on travaille dans le plan de coupe d'un barreau creux et infini dans la direction z . L'épaisseur des parois de matière est notée e . On supposera que L et H sont grands devant e . Dans ces parois, la chaleur est transmise par conduction avec une conductivité k . L'émissivité ε est identique pour les quatre surfaces rayonnantes. La structure est soumise à une température imposée \bar{T} sur deux faces verticales, à un flux ϕ_1 sur deux faces horizontales et à un flux $\phi_2 = -\frac{L}{H}\phi_1$ sur deux faces verticales comme indiqué sur la figure 4. En raison des symétries du problème, on a : $T_1 = T_3$; $Q_3 = Q_1$; $Q_4 = Q_2$ (T_i et Q_i représentant respectivement la température et la puissance perdue par la surface i). Le facteur de forme entre la surface i et la surface j est noté F_{ij} . **Dans cette question, ainsi que dans celles qui suivent, les calculs des températures et des flux sont supposés être réalisés au centre de la structure.**

Ecrire les deux équations radiatives associées aux surfaces 1 et 2 en fonction de σ , ε , $\frac{Q_1}{L}$, $\frac{Q_2}{H}$, F_{13} , F_{24} , T_1 et \bar{T} . On numérottera (1) et (2) ces deux équations.

6) En ajoutant [(1) multiplié par $(1 - F_{24})$] à [(2) multiplié par $(1 - F_{13})$], montrer que : $\frac{Q_2}{H} = \frac{F_{24} - 1}{1 - F_{13}} \frac{Q_1}{L}$.

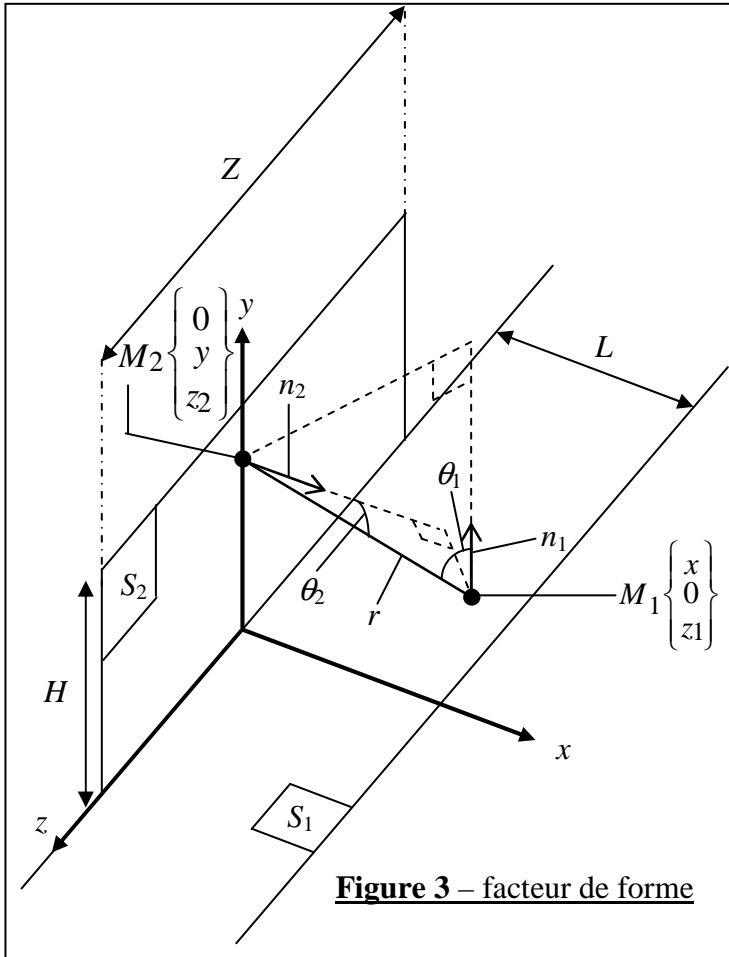
7) Calculer F_{12} à l'aide de la question 3. En déduire l'expression de F_{13} en fonction de s . En permutant les rôles de L et H , en déduire l'expression de F_{24} en fonction de s .

8) Montrer que $s(F_{13} - 1) = (F_{24} - 1)$. Dédurre de la question 6 que $\frac{Q_2}{H} = -s \frac{Q_1}{L}$ et que $Q_2 = -Q_1$. Ce dernier résultat est-il logique ?

9) En utilisant les questions 5 et 8, calculer T_1 en fonction de \bar{T} , ε , σ , F_{13} , ϕ_1 et s ($\sigma =$ constante de Stefan-Boltzmann = $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$). Indication : on fera l'hypothèse que $\frac{Q_1}{L} = \phi_1$.

- 10) Calculer la température T_{p1} sur la paroi où est appliqué le flux ϕ_1 en fonction de ϕ_1, e, k et T_1 .
- 11) Calculer la température T_{p2} sur la paroi où est appliqué le flux ϕ_2 en fonction de ϕ_1, s, e, k et \bar{T} .
- 12) Comparer les résultats des questions 9, 10 et 11 avec les calculs éléments finis contenus dans le tableau 1.

Application numérique : $\bar{T} = 293 \text{ K}$; $\varepsilon = 0.3$; $\phi_1 = 10^4 \text{ W.m}^{-2}$; $s = 2$; $k = 5 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $e = 10^{-2} \text{ m}$.



L (m)	H (m)	T ₁ (K)	T _{1p} (K)	T _{2p} (K)
1	0.5	1112	1132	253
2	1	1131	1151	253
4	2	1141	1161	253

Tableau 1 – Calcul éléments finis

