MN52 – Modélisation Numérique pour l'Ingénieur – Applications et Codes Industriels

Final Printemps 2013, F. Peyraut-M., T. Viollet

Durée de l'examen : 2 heures

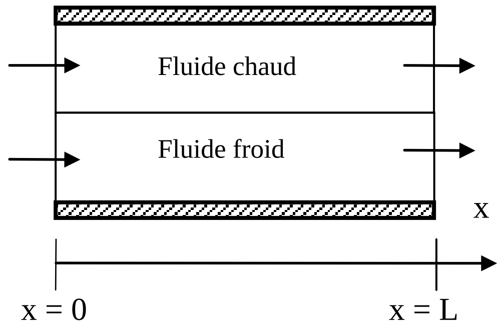
Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées. L'accès à des documents électroniques (via ordinateur portable, téléphone portable etc.) est interdit.

Les sujets de mécanique des fluides et de thermique sont à rendre sur des feuilles séparées.

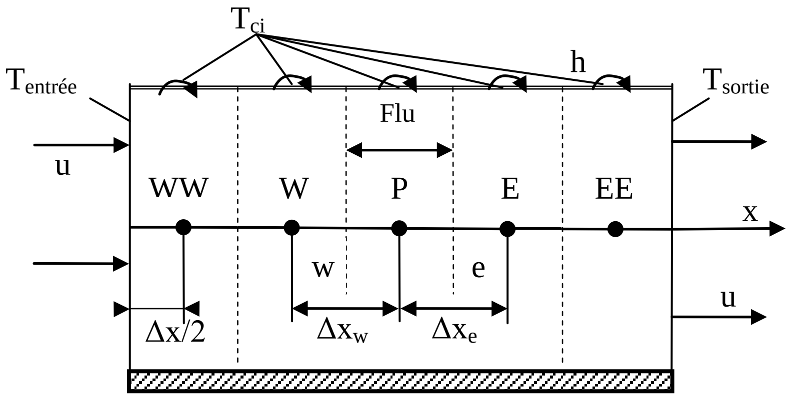
I MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN TRANSFERT THERMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES (10 POINTS)

A] (8 points) :

On considère un échangeur cocourant (les fluides circulent dans le même sens) d'une longueur L = 5 m, d'une largeur l = 0,5 m, parfaitement calorifugé vis-à-vis de l'extérieur et fonctionnant en régime permanent.
L'échange thermique s'effectue par la paroi de séparation entre les deux fluides. Son coefficient d'échange est $h = 50\ W.m^{-2}.K^{-1}$.
On s'intéresse ici au fluide froid dont les propriétés sont les suivantes :
une conductivité thermique $\lambda = 0{,}6\ W.m^{-1}.K^{-1}$,



une capacité thermique massique $c_{th} = 10^3\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ et une masse volumique $\rho = 1{,}2\ kg.m^{-3}$.
La hauteur de fluide froid est de 20 cm et il circule à la vitesse de 1,25 m/s.
L'objectif est de déterminer comment le fluide froid se réchauffe le long de l'échangeur.
Pour cela, on discrétise le domaine à l'aide de 5 volumes identiques de largeur $\Delta x = 1$ m de la façon suivante:



On dispose de la température moyenne dans le fluide chaud pour chaque volume :

	Tc_{WW}	Tc_W	Tc_P	Tc_E	Tc_{EE}
T_{ci}(°C)	18,85	17,04	15,75	14,82	14,16

La température du fluide froid en amont de l'échangeur est constante et égale à la température d'entrée dans l'échangeur $T_{entrée} = 5$°C. Sa température à la sortie de l'échangeur est $T_{sortie} = 11{,}1$°C, elle reste ensuite constante.

1) Déterminer la distribution de température aux différents nœuds en utilisant un schéma centré pour les termes diffusifs et un schéma amont pour les termes convectifs.

2) Faire de même avec un schéma QUICK pour les termes convectifs.

3) Comparer avec la solution analytique:

T_{WW}	T_W	T_P	T_E	T_{EE}
5,81	7,27	8,55	9,67	10,66

Quelle approche donne le meilleur résultat ? Justifier votre réponse.

B] (2 points) :
Le renforcement du couplage pression/vitesse passe-t-il uniquement par un choix d'algorithme?

II QUESTIONS DE THERMIQUE RADIATIVE (2 POINTS)

<u>Barème</u> : **1 point à gagner ou à perdre par question. Une seule réponse par question. Le bilan des points, positif ou négatif, est cumulé avec les autres sujets.**
Bonne réponse : + 1 ; Pas de réponse : 0 ; Mauvaise réponse : - 1

1) L’émissivité a été fixée sous ANSYS à -10 (fig. 1). Cela signifie que :

A] l’émissivité est égale à -10
B] il y a dix surfaces qui rayonnent entre elles avec une émissivité égale à 10.
C] il y a dix surfaces qui rayonnent entre elles avec une émissivité égale à 1.
D] l’utilisateur souhaite définir une émissivité fonction de la température.

2) Un calcul radiatif non linéaire est exécuté avec ANSYS en utilisant le schéma de Newton-Raphson incrémental appliqué avec un nombre de pas de charge NSUBST égal à 10 (fig. 2). Cela signifie que :

A] la charge thermique est divisée par 10 et on procède en 10 étapes.
B] la charge thermique est multipliée par 10 et on procède en 10 étapes.
C] le calcul s’arrête lorsque le paramètre TIME passe de 0 à 10.
D] le nombre total d’itérations cumulées ne doit pas dépasser 10.

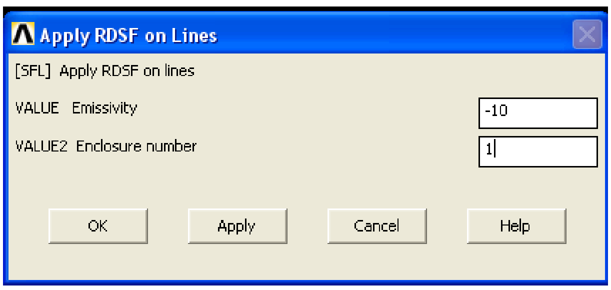


Figure 1 – *Emissivité*

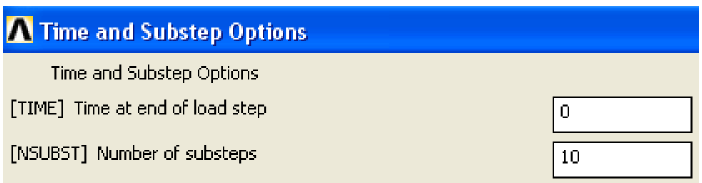


Figure 2 – *Paramètre pour Newton-Raphson incrémental*

III THERMIQUE EN CONDUCTION 2D-PLAN (10 POINTS)

On considère un quadrangle e de sommets A_1, A_2, A_3 et A_4 (fig. 3). On note B_1 et B_2 deux points situés respectivement sur les arêtes $[A_1, A_2]$ et $[A_4, A_3]$ de e. Ces deux points s'expriment de la manière suivante en fonction d'un paramètre réel $\hat{x}$ compris entre 0 et 1 :

$$B_1 = \left(1-\hat{x}\right)A_1 + \hat{x}A_2 \;;\; B_2 = \left(1-\hat{x}\right)A_4 + \hat{x}A_3$$

1) Exprimer un point quelconque M(x,y) de e (fig. 3) en fonction de B_1 et B_2 et d'un paramètre réel $\hat{y}$ compris entre 0 et 1. En déduire la correspondance $(x, y) = F(\hat{x}, \hat{y})$ entre e et l'élément de référence ê de la figure 4.
2) Calculer les quatre fonctions de forme $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$, $\hat{N}_3$ et $\hat{N}_4$ associées à l'élément de référence ê.
3) Déduire des questions 1) et 2) que $F(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i=1}^{4} \hat{N}_i\left(\hat{x},\hat{y}\right)A_i$.
4) Montrer que la matrice jacobienne J associée à F s'écrit sous la forme suivante : $J = \left[\left(1-\hat{y}\right)\overrightarrow{A_1A_2} + \hat{y}\overrightarrow{A_4A_3} \quad \left(1-\hat{x}\right)\overrightarrow{A_1A_4} + \hat{x}\overrightarrow{A_2A_3}\right]$.
5) Dans le cas particulier où e est un parallélépipède, simplifier l'expression de J et montrer que le résultat ne dépend que de $\overrightarrow{A_1A_2}$ et de $\overrightarrow{A_2A_3}$.

Dans toutes les questions qui suivent, on considère que e est un rectangle avec des côtés parallèles aux axes et de longueur *a* et *b* (fig. 5).

6) Montrer que : $J^{-T} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$.
7) Montrer que : $\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1}\left(\hat{y}-1\right) & a^{-1}\left(1-\hat{y}\right) & a^{-1}\hat{y} & -a^{-1}\hat{y} \\ b^{-1}\left(\hat{x}-1\right) & -b^{-1}\hat{x} & b^{-1}\hat{x} & b^{-1}\left(1-\hat{x}\right) \end{bmatrix}$.
8) Montrer que la matrice de conductivité élémentaire s'écrit :

$$\underline{\underline{k}}_e = \frac{k}{6ab}\begin{bmatrix} 2\left(a^2+b^2\right) & -2b^2+a^2 & -a^2-b^2 & b^2-2a^2 \\ SYM & 2\left(a^2+b^2\right) & b^2-2a^2 & -a^2-b^2 \\ SYM & SYM & 2\left(a^2+b^2\right) & -2b^2+a^2 \\ SYM & SYM & SYM & 2\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}$$; k=conductivité du matériau

9) Montrer que le second membre élémentaire associé à une source interne de chaleur $\overline{q}$ (W/m^3) s'écrit :

$$\underline{b}_e = \frac{\overline{q}\,ab}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

10) On considère le maillage de la figure 6 avec une source interne de chaleur $\overline{q}$ égale à 200 W/m^3 et une température imposée de 5 °C sur les nœuds 1, 2, 3 et 4. La conductivité k du matériau est de 60 W/(m°C). En choisissant la convention de numérotation locale de la figure 5 pour chacun des deux éléments du maillage, assembler la matrice et le second membre du système linéaire associés au modèle élément fini. Calculer les températures aux nœuds 5 et 6 en explicitant le détail du calcul (à titre de vérification des calculs, les résultats obtenus avec ANSYS sont donnés dans le tableau 1).

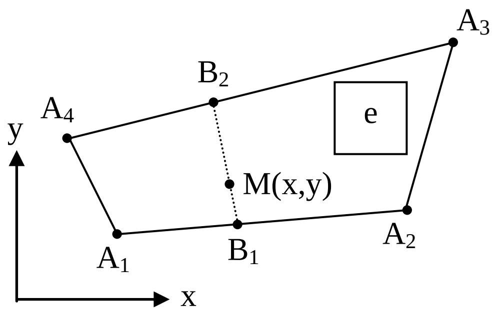


Figure 3 – quadrangle quelconque

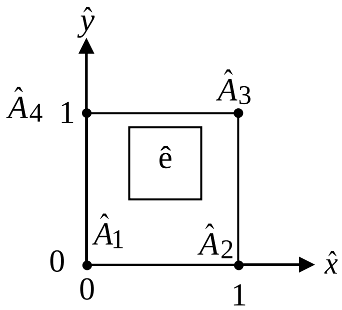


Figure 4 – quadrangle de référence

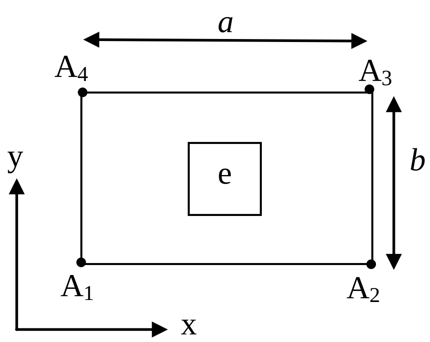


Figure 5 – rectangle avec côtés parallèles aux axes

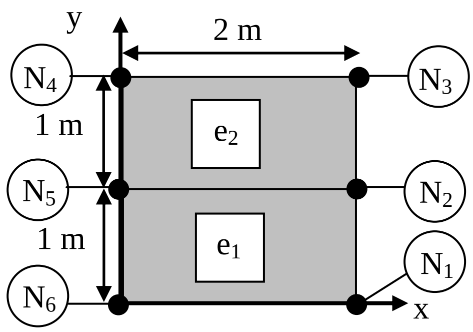


Figure 6 – maillage de la structure

Noeuds	1	2	3	4	5	6
Température	10	10	10	10	13.576	14.503

Tableau 1 – *calcul ANSYS*