DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier ainsi que la calculatrice sont autorisées.

L'accès à des documents électroniques (via ordinateur portable, téléphone portable etc.) est interdit.

Les sujets I et II sont à rendre sur des feuilles séparées.

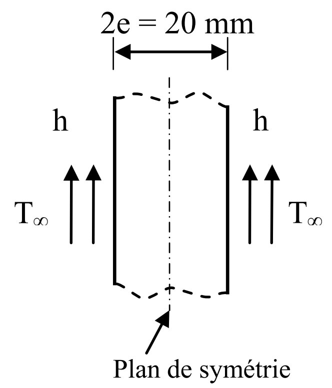
SUJET I : METHODE DES VOLUMES FINIS EN TRANSFERT THERMIQUE ET MECANIQUE DES FLUIDES (10 POINTS)

A] (8 points) :

On considère un élément radioactif de combustible d'un réacteur nucléaire. Cet élément est de forme plane et tel que son épaisseur 2e est faible devant les autres dimensions (2e = 20 mm). L'élément est constamment refroidi par convection de façon identique sur ses deux faces ($h = 1100$ $W.m^{-2}.K^{-1}$ et $T_\infty = 250°C$). T_∞ reste constante.

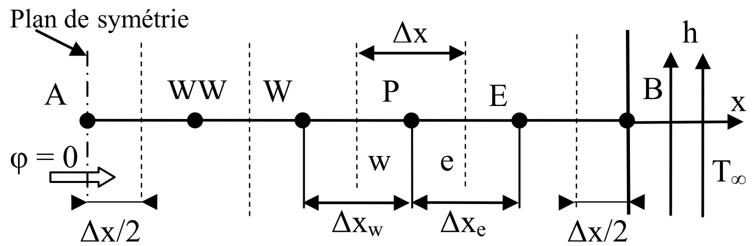
En fonctionnement normal, la chaleur est générée uniformément au sein de l'élément avec un taux volumique $\dot{q} = 10^7$ W/m^3. Sa conductivité est $\lambda = 30$ $W.m^{-1}.K^{-1}$.

La masse volumique est $\rho = 20.10^3$ $kg.m^{-3}$, la capacité thermique massique $c_{th} = 300$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$.



On cherche à connaître la distribution des températures au sein de l'élément à partir de l'équation de diffusion thermique vue en cours et TD.

Compte tenu de la symétrie, on décide de n'étudier qu'un demi-élément d'épaisseur e = 10 mm. Pour cela, on discrétise ce domaine suivant e à l'aide de 4 volumes identiques de largeur $\Delta x = 2$ mm et de 2 demi-volumes A et B de largeur $\Delta x/2$ de la façon suivante :



La face ouest (w) du demi-volume A est le plan de symétrie de l'élément. Par conséquent, le flux thermique surfacique à travers cette face est nul.

La face est (e) du demi-volume B est la face où s'effectue le transfert thermique par convection avec le fluide (loi de Newton).

On rappelle que $\Delta x_w = x_i - x_{i-1}$ et que $\Delta x_e = x_{i+1} - x_i$.

1) Étude en comportement stationnaire :

a) Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant la température pour les 6 volumes.

b) Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.

c) Calculer la distribution des températures.

2) Étude en comportement instationnaire :
Le fonctionnement du réacteur induit un changement brutal du taux de génération volumique de chaleur interne. Désormais, $\dot{q} = 2.10^7$ W/m^3. On veut connaître l'état de l'élément 1,5s après ce changement.
On rappelle la définition des coefficients : $a_i = \rho.c_{th}.V_i/\Delta t$, $b_i = \lambda S/\Delta x_i$ et $c_i = \dot{q}.V_i$
a) On considère un schéma explicite avec un pas de temps $\Delta t = 0{,}3$s.
Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant l'évolution de la température pour les 6 volumes.
b) Vérifier que la condition de stabilité du schéma est remplie.
c) Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.

d) Calculer la distribution des températures à t = 1,5s en utilisant comme températures initiales (t = 0s) les valeurs suivantes :

T_A	T_{WW}	T_W	T_P	T_E	T_B
357	356	354	351	346	340

e) Pensez-vous que la distribution de température est stabilisée à ce moment-là ?

B] (2 points) : Donnez au minimum 4 conditions pour réussir un calcul.

SUJET II : THERMIQUE EN CONDUCTION (11 POINTS)

On considère un problème de conduction thermique 2D avec le maillage de la figure 1 qui comporte 6 nœuds et 3 triangles linéaires. On respectera la convention de numérotation locale des éléments indiquée sur la figure 2. Les nœuds 1, 2 et 3 ont une température imposée égale à $\bar{T}$ et le nœud 4 une température imposée égale à $\bar{T}_4$. On applique **sur l'élément 1 seulement** une source de chaleur volumique uniforme $\bar{q}$. La conductivité du matériau est *k* et la dimension de la structure est paramétrée par *a* comme indiqué sur la figure 1.

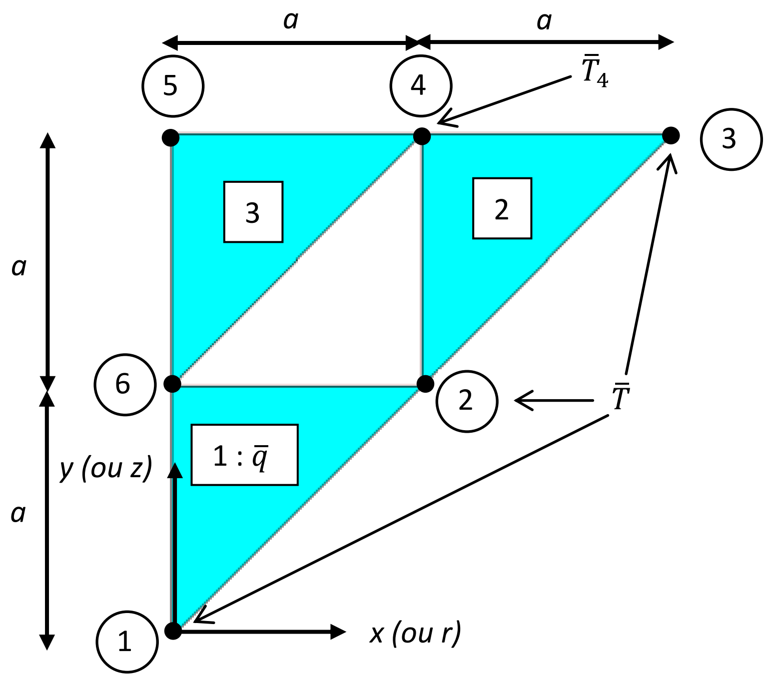


Figure 1 – *Maillage plan*

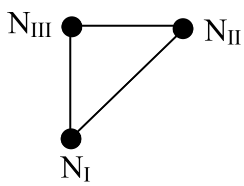


Figure 2 – *Convention de numérotation locale des nœuds*

Dans les questions Q1 à Q7 qui suivent, on supposera que le problème est un problème **2D-plan**.

Q1. (1 point) Calculer les matrices de conductivité élémentaires en fonction de *k*.

Q2. (1 point) Assembler la matrice de conductivité globale en fonction de *k*.

Q3. (1 point) Calculer le second membre élémentaire et assembler le second membre global en fonction de *a* et de $\bar{q}$.

Q4. (1 point) Calculer les températures T_5 et T_6 en fonction de *a*, *k*, $\bar{q}$, $\bar{T}$ et $\bar{T}_4$ et en fournissant tous les détails de l'inversion du système linéaire.

Q5. (1 point) Calculer la chaleur par éléments (*Element Solution/Heat Flow*) pour les trois éléments du maillage. Le résultat sera exprimé en fonction de *a*, *k*, $\bar{q}$, $\bar{T}$, $\bar{T}_4$, T_5 et T_6.

Q6. (1 point) A l'aide des résultats des questions Q4 et Q5, calculer la chaleur au nœud 2 (*Nodal Loads/Heat Flow*). Le résultat sera exprimé en fonction de *a*, *k*, $\bar{q}$, $\bar{T}$ et $\bar{T}_4$.

Q7. (1 point) Dans cette question, on souhaite déterminer des jeux de conditions aux limites permettant d'obtenir l'égalité suivante : T_5=T_6.
Pour faciliter les calculs, on introduira la variable $X = 2\bar{T} + \frac{a^2\bar{q}}{3k}$.
Déduire de la question Q4 l'expression liant *X* et $\bar{T}_4$ à T_5.

Dans les questions Q8 à Q11 qui suivent, on supposera que le problème est un problème **2D-axisymétrique**. On prendra les données numériques suivantes :

$$a=2\ m\ ;\ k=30\ W/(m\ °C)\ ;\ \bar{q} = 60\ W/m^3\ ;\ \bar{T}=2\ °C\ ;\ \bar{T}_4=18\ °C$$

Q8. (1 point) Calculer les trois matrices de conductivité élémentaires.

Q9. (1 point) Assembler la matrice de conductivité globale.

Q10. (1 point) Calculer le second membre élémentaire et assembler le second membre global.

Q11. (1 point) Calculer les températures T_5 et T_6 en fournissant tous les détails de l'inversion du système linéaire.