DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées.

L'usage de moyens électroniques (ordinateur, téléphone, traducteur automatique etc.) est interdit. Les calculatrices sont autorisées.

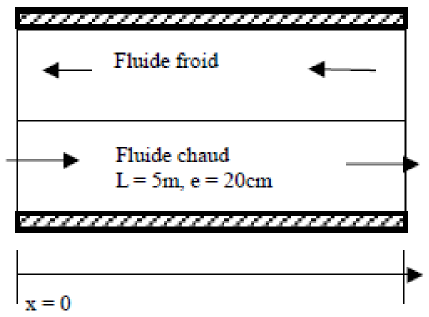
Les deux problèmes I et II sont à rendre sur des feuilles séparées.

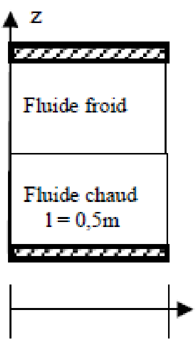
L'ensemble des questions représente un total de 26 points. Le final sera noté sur 20, sans appliquer de règle de trois. Il y a donc 6 points bonus.

Problème I – Méthode des volumes finis en transfert thermique et mécanique des fluides (10 pts)

On considère un échangeur à contre-courant (les fluides circulent en sens opposés) d'une longueur L = 5 m, d'une largeur l = 0,5 m, parfaitement calorifugé vis-à-vis de l'extérieur et fonctionnant en régime permanent. L'échange thermique s'effectue par la paroi de séparation entre les deux fluides. Son coefficient d'échange est $h = 50\ W.m^{-2}.K^{-1}$.

On s'intéresse ici au **fluide chaud** dont les propriétés sont les suivantes : une conductivité thermique $\lambda = 0,6\ W.m^{-1}.K^{-1}$, une capacité thermique massique $c_{th} = 10^3\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ et une masse volumique $\rho = 1,2\ kg.m^{-3}$.



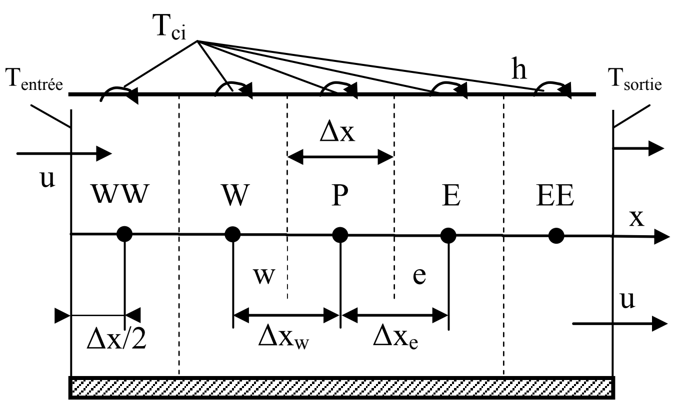


La hauteur de fluide chaud est e = 20 cm et il circule à la vitesse de 1,25 m/s. L'objectif est de déterminer comment le fluide chaud se refroidit le long de l'échangeur. Pour cela, on discrétise le domaine à l'aide de 5 volumes identiques de largeur $\Delta x = 1$ m.

On dispose de la température moyenne dans le fluide froid pour chaque volume :

	Tf_{WW}	Tf_W	Tf_P	Tf_E	Tf_{EE}
T_{ci}(°C)	11,1	9,8	8,4	7	5,7

La température du fluide chaud en amont de l'échangeur est constante et égale à la température d'entrée dans l'échangeur $T_{entrée} = 20$°C. Sa température à la sortie de l'échangeur est $T_{sortie} = 13,2$°C, elle reste ensuite constante.



Il s'agit de déterminer la distribution de température aux différents nœuds et de la comparer aux mesures suivantes :

T_{WW}	T_W	T_P	T_E	T_{EE}
19,35	17,98	16,62	15,25	13,88

1) Montrez que l'utilisation d'un schéma centré pour les termes convectifs n'est pas judicieuse. Vous utiliserez un schéma centré pour les termes diffusifs.

2) Testez successivement un schéma amont et un schéma amont au second ordre pour les termes convectifs. Le schéma amont au second ordre s'écrit pour les faces w et e du volume de centre P:

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_W - \frac{1}{2}\Phi_{WW} \qquad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_W \qquad \text{si } u_w > 0 \text{ et } u_e > 0$$

ou

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_E \qquad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_E - \frac{1}{2}\Phi_{EE} \qquad \text{si } u_w < 0 \text{ et } u_e < 0$$

3) Quelle approche donne le meilleur résultat ? Justifier votre réponse.

PROBLÈME II – MODÉLISATION EN CONDUCTION THERMIQUE (16 POINTS)

On considère le problème thermique de conduction en 2D plan associé au maillage de la Figure 1. Les numéros de nœuds sont inclus dans les cercles et les numéros d'éléments dans les carrés. La convention de numérotation locale des éléments qui devra être respectée pour les calculs éléments finis est indiquée sur la Figure 2. L'origine du repère se situe au nœud 6 et la longueur *a* mentionnée sur la Figure 1 vaut 1 m. La conductivité du matériau est égale à 10 W/(m°C). Une température de 10 °C est imposée sur la base inférieure d'équation y=0 tandis qu'une température de 24 °C est imposée sur la base supérieure d'équation y=2. La structure est enfin soumise à une source volumique de chaleur interne $\bar{q}$ (W/m^3), appliquée à chacun des quatre triangles du maillage. La source $\bar{q}$ est une fonction non constante dépendante de y et définie par l'équation (1) qui suit :

$$\bar{q}(x,y) = (10y^2 - 20y + 40)exp(y) \tag{1}$$

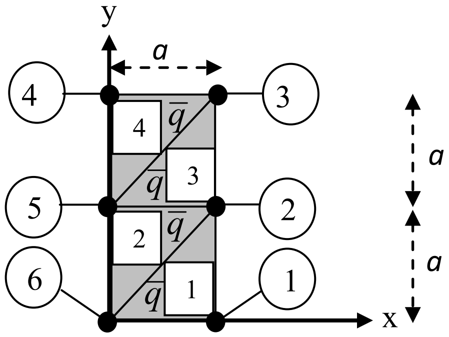


Figure 1 – Maillage éléments finis

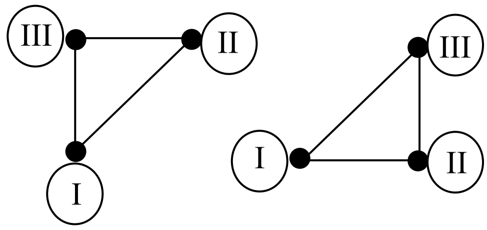


Figure 2 – Convention de numérotation locale

Q1) **(1 point)** Vérifier que l'expression (2) de la température T qui suit est solution de l'équation de diffusion de la chaleur avec la source de chaleur volumique définie par l'équation (1) :

$$T(x,y) = (-y^2 + 6y - 14)exp(y) + 3exp(2)y + 24 \tag{2}$$

Q2) **(0.5 point)** Montrer que la température définie par l'équation (2) satisfait les deux conditions aux limites en y=0 et y=2.

Q3) **(0.5 point)** Un calcul précis effectué avec ANSYS avec un maillage fin fournit une température égale à 21.703 °C sur tous les nœuds situés à l'ordonnée y=1. Cette valeur de température est-elle cohérente avec l'équation (2) ? Justifier votre réponse.

Le but des questions Q4) à Q12) qui suivent est de calculer le second membre élémentaire b_e associé au triangle courant T_e avec la source volumique de chaleur $\bar{q}$ définie par la formule (1). Cette source n'étant pas constante, on se propose d'approximer b_e (équation (3)) par une formule de quadrature de type point milieu (équation (4)) :

Rappel Cours/TD :
$$b_e = \iint_{T_e} \begin{Bmatrix} N_{\mathrm{I}}(x,y) \\ N_{\mathrm{II}}(x,y) \\ N_{\mathrm{III}}(x,y) \end{Bmatrix} \bar{q}(x,y)dxdy \tag{3}$$

Approximation point milieu :
$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \tag{4}$$

Dans l'équation (3), N_{I}, N_{II} et N_{III} représentent les fonctions de forme associées aux sommets A_{I}, A_{II} et A_{III} du triangle T_e.

Q4) (0.5 point)
En procédant par analogie, par quoi serait-il logique de remplacer la longueur *b-a* qui apparaît dans la formule (4) si on veut approximer une intégrale double comme celle qui apparaît dans l'équation (3) ? :

a) Le périmètre du triangle T_e
b) La surface S_e du triangle T_e

Q5) (0.5 point) En procédant par analogie, par quoi serait-il logique de remplacer le milieu de l'intervalle d'intégration de la formule (4) ($\frac{a+b}{2}$ en l'occurence) si on veut approximer une intégrale double comme celle qui apparaît dans l'équation (3) ? :

a) Le centre de gravité G du triangle T_e
b) $\frac{A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}}{2}$
c) $\frac{A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{III}}}{2}$

Q6) (0.5 point) A l'aide des questions Q4) et Q5) qui précèdent, déduire qu'une extension logique de la formule (4) à un triangle T_e est donnée par l'approximation (5) qui suit :

$$\iint_{T_e} f(x,y)dxdy \approx f(G)\,S_e \tag{5}$$

Q7) (0.5 point) Déduire de la question Q6) que : $b_e \approx \begin{Bmatrix} N_{\mathrm{I}}(G) \\ N_{\mathrm{II}}(G) \\ N_{\mathrm{III}}(G) \end{Bmatrix} \bar{q}(G) S_e$ (6)

Q8) (0.5 point) On rappelle que le centre de gravité G d'un triangle T_e de sommets A_{I}, A_{II} et A_{III} peut se calculer par : $G = \frac{A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}+A_{\mathrm{III}}}{3}$. En déduire les coordonnées du barycentre $\hat{G}$ du triangle de référence $\hat{T}$.

Q9) (1 point) A l'aide de la fonction affine F qui lie le triangle de référence $\hat{T}$ et le triangle courant T_e, et en utilisant la question Q8), montrer que $F(\hat{G}) = G$. En déduire que :

$$N_{\mathrm{I}}(G) = \widehat{N_{\mathrm{I}}}(\hat{G}) = \frac{1}{3} \,;\, N_{\mathrm{II}}(G) = \widehat{N_{\mathrm{II}}}(\hat{G}) = \frac{1}{3} \,;\, N_{\mathrm{III}}(G) = \widehat{N_{\mathrm{III}}}(\hat{G}) = \frac{1}{3}$$

Q10) (0.5 point) Pour calculer le terme $\bar{q}(G)$ contenu dans la formule (6), on utilisera l'approximation supplémentaire suivante :

$$\bar{q}(G) \approx \bar{q}(A_{\mathrm{I}})N_{\mathrm{I}}(G) + \bar{q}(A_{\mathrm{II}})N_{\mathrm{II}}(G) + \bar{q}(A_{\mathrm{III}})N_{\mathrm{III}}(G) \tag{7}$$

Montrer à l'aide de la question Q9) et de l'approximation (7) que :

$$\bar{q}(G) \approx \frac{\bar{q}(A_{\mathrm{I}})+\bar{q}(A_{\mathrm{II}})+\bar{q}(A_{\mathrm{III}})}{3} \tag{8}$$

Q11) (0.5 point) A l'aide des questions Q7), Q9) et Q10), montrer que le second membre élémentaire b_e peut être approximé par :

$$b_e \approx \frac{S_e}{9}[\bar{q}(A_{\mathrm{I}}) + \bar{q}(A_{\mathrm{II}}) + \bar{q}(A_{\mathrm{III}})] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Q12) (2.5 points) En utilisant la formule (9) et le maillage de la Figure 1, calculer les seconds membres élémentaires. Montrer que le second membre assemblé est donné par :

$$b_e = \frac{1}{18}\begin{Bmatrix} 2q_1 + q_2 \\ 3q_1 + 5q_2 + q_3 \\ 3q_2 + 3q_3 \\ q_2 + 2q_3 \\ q_1 + 5q_2 + 3q_3 \\ 3q_1 + 3q_2 \end{Bmatrix}$$

Où on a posé : $q_1 = \bar{q}(0,0) = \bar{q}(1,0)$; $q_2 = \bar{q}(0,1) = \bar{q}(1,1)$; $q_3 = \bar{q}(0,2) = \bar{q}(1,2)$

Q13) (2.5 point) Assembler la matrice de conductivité (on pourra reprendre les résultats établis en Travaux Dirigés), écrire le système linéaire à résoudre, inverser la matrice de ce système en détaillant toutes les étapes et déterminer les températures aux nœuds 2 et 5 (N.B. : un calcul réalisé avec ANSYS a donné les résultats suivants : T_2=22.52 ; T_5=23.467).

Le but des questions Q14) à Q17) qui suivent est d'étendre les résultats particuliers des questions Q1) et Q2) au cas plus général d'une source volumique de chaleur avec un polynôme $Q(y)$ de degré n quelconque :

$$\bar{q}(x,y) = Q(y)exp(y)\,;\, Q(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, y^i \tag{10}$$

On cherche alors une solution $T(x,y)$ sous la forme suivante :

$$T(x,y) = P(y)exp(y) + Ay + B \tag{11}$$

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, y^i \tag{12}$$

Q14) (1 point) En utilisant l'équation (11) et l'équation de diffusion de la chaleur, montrer que :

$$10[P''(y) + 2P'(y) + P(y)] = -Q(y) \tag{13}$$

Q15) (1.5 points) En utilisant l'équation (13) et en identifiant les termes de même degré, montrer que :

$$b_n = -\frac{a_n}{10} \tag{14}$$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{10}\{a_{n-1} - 2na_n\} \tag{15}$$

$$b_i = -\frac{a_i}{10} - (i+1)(i+2)b_{i+2} - 2(i+1)b_{i+1} \quad i = n-2, \dots, 0 \tag{16}$$

Q16) (1 point) A l'aide des conditions aux limites en y=0 et y=2, montrer que les constantes A et B de l'équation (11) sont données par :

$$A = 7 + \frac{b_0}{2} - \left(\sum_{i=0}^{n} b_i\, 2^{i-1}\right)exp(2)\,; B = 10 - b_0 \tag{17}$$

Q17) (1 point) Le but de cette question est de retrouver le cas particulier de l'équation (2) en utilisant les résultats généraux établis dans les questions Q15) et Q16). Une démarche possible consiste à poser $a_0 = 40,\ a_1 = -20$ et $a_2 = 10$ (équation (1)) puis à utiliser successivement les équations (14), (15), (16) et (17). Montrer que l'on retrouve bien les coefficients b_2, b_1, b_0, A et B de l'équation (2).