Correction final MN52 - Thermique - P17

Q1) Surfaces planes $\Rightarrow F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$

Q2) (1) avec $i=1$: $\underbrace{F_{11}}_{\overset{\text{Q1)}}{=0}} + F_{12} + F_{13} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1 - F_{13}$

Q3) (2) $\Rightarrow L F_{12} = L F_{21} \Rightarrow F_{12} = F_{21}$

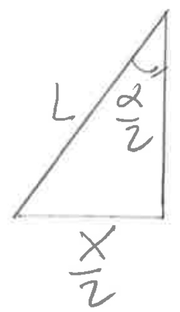
Q4) (1) avec $i=2$: $\underbrace{F_{21}}_{\overset{\text{Q3)}}{=F_{12}}} + \underbrace{F_{22}}_{\overset{\text{Q1)}}{=0}} + F_{23} = 1 \Rightarrow F_{23} = 1 - F_{12}$

Q5) Les côtés 1 et 2 jouent le même rôle par rapport au côté 3 $\Rightarrow F_{32} = F_{31}$

Q6) (1) avec $i=3$: $F_{31} + \underbrace{F_{32}}_{=F_{31}} + \underbrace{F_{33}}_{\overset{\text{Q1)}}{=0}} = 1 \Rightarrow 2F_{31} = 1 \Rightarrow F_{31} = \frac{1}{2}$

Q7) $F_{32} \underset{\text{Q5)}}{=} F_{31} \underset{\text{Q6)}}{=} \frac{1}{2}$

Q8)



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{X/2}{L}$$

$$\Rightarrow X = 2L\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Q9) (2) $\Rightarrow L F_{13} = \underbrace{2L\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{Q8)}} F_{31} \Rightarrow F_{13} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\overbrace{F_{31}}^{\overset{\text{Q6)}}{=\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow F_{13} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q10) $F_{12} \underset{\text{Q2)}}{=} 1 - F_{13} \underset{\text{Q9)}}{=} 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q11) $F_{21} \underset{\text{Q3}}{=} F_{12} \underset{\text{Q10}}{=} 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q12) $F_{23} \overset{\text{Q4)}}{=} 1 - F_{12} \overset{\text{Q10}}{=} 1 - \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q13) On utilise les équations démontrées en TD : (2)

Côté 1 : $\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - \underbrace{F_{12}}_{\substack{\text{Q10)} \to \,=\\ 1-S}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} - \underbrace{F_{13}}_{\substack{\text{Q9)} \to \,=\\ S}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} = \sigma\left(T_1^4 - \underbrace{F_{12}}_{1-S}T_2^4 - \underbrace{F_{13}}_{S}T_3^4\right)$

où on a posé : $S = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Comme $T_1 = T_2$, l'équation se simplifie :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - (1-S)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} - S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} = \sigma S\left(T_1^4 - T_3^4\right) \quad (C1)$$

Côté 2 : $\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} - \underbrace{F_{21}}_{\substack{\text{Q11)} \to \,=\\ 1-S}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - \underbrace{F_{23}}_{\substack{\text{Q12)} \to \,=\\ S}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} = \sigma\left(T_2^4 - \underbrace{F_{21}}_{1-S}T_1^4 - \underbrace{F_{23}}_{S}T_3^4\right)$

On simplifie avec $T_1 = T_2$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} - (1-S)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} = \sigma S\left(T_1^4 - T_3^4\right) \quad (C2)$$

Côté 3 : $\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} - \underbrace{F_{31}}_{\substack{\text{Q6)} \to \,=\\ \frac{1}{2}}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - \underbrace{F_{32}}_{\substack{\text{Q7)} \to \,=\\ \frac{1}{2}}}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} = \sigma\left(T_3^4 - \underbrace{F_{31}}_{\frac{1}{2}}T_1^4 - \underbrace{F_{32}}_{\frac{1}{2}}T_2^4\right)$

On simplifie avec $T_1 = T_2$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} - \frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - \frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} = \sigma\left(T_3^4 - T_1^4\right) \quad (C3)$$

Q14) (C1) − (C2) ⇒ :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} - (1-S)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} - \cancel{S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3}} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_2}{A_2} + (1-S)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1} + \cancel{S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_2}{A_2}\right) + (1-S)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_2}{A_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\left(1 + (1-S)(1-\varepsilon)\right)}_{>0 \text{ car } S\leq 1 \text{ et } \varepsilon \leq 1}\left(\frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_2}{A_2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2}$$

Résultat logique compte tenu de la symétrie du problème

Q15) (C1) + S × (C3) et Q14) ⇒ :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1}\left(1 - (1-S)(1-\varepsilon)\right) - S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} + S\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} - S\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_1}{A_1}$$

$$= \sigma S\left(T_1^4 - T_3^4\right) + \sigma S\left(T_3^4 - T_1^4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\frac{Q_1}{A_1}\left[\underbrace{1 - (1-\cancel{S})(1-\varepsilon) - \cancel{S(1-\varepsilon)}}_{1-1+\varepsilon = \cancel{\varepsilon}}\right] + \frac{S}{\cancel{\varepsilon}}\frac{Q_3}{A_3}\left(\underbrace{1-(1-\varepsilon)}_{\cancel{\varepsilon}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{A_1} + S\frac{Q_3}{A_3} = 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{A_1} = -S\frac{Q_3}{A_3}$$

Q16) $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow \dfrac{Q_1}{A_1} + \dfrac{Q_2}{A_1} + \dfrac{Q_3}{A_1} = 0$

$$\frac{Q_2}{A_1} \overset{Q14)}{=} \frac{Q_2}{A_2}\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{L}{L} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{A_1} = -\frac{1}{2}\frac{Q_3}{A_1} = \frac{Q_3}{A_3}\frac{A_3}{A_1} = \frac{Q_3}{A_3}\frac{X}{L}, \quad \frac{X}{L} \overset{Q8)}{=} 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{A_1} = -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{Q_3}{A_3}$$

On retrouve le même résultat que dans la question Q15), ce qui est normal puisque l'on traite le même problème !

Q17) On reporte les résultats de Q14) et Q15)

dans (C3) :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_3}{A_3} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} s \frac{Q_3}{A_3} = \sigma (T_3^4 - T_1^4)$$

$$\Rightarrow T_3^4 = T_1^4 + \frac{1}{\varepsilon\sigma}\frac{Q_3}{A_3}[1 + (1-\varepsilon)s]$$

$$\Rightarrow T_3 = \left\{ T_1^4 + \frac{1}{\varepsilon\sigma}\frac{Q_3}{A_3}[1 + (1-\varepsilon)s] \right\}^{1/4}$$

Q18) Sur la surface externe du côté 1,

on a :

$$\underbrace{-\langle q, \underline{n} \rangle}_{\text{Flux de chaleur apporté à la surface externe}} \overset{\text{Loi de Fourier}}{=} k \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right)}_{\text{Dérivée de T dans la direction } \underline{n}}$$

Comme $e \ll L$, on peut faire le même type d'hypothèse qu'en TD :

$$\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \approx \frac{\overline{T_1} - T_1}{e}$$

On peut aussi supposer que :

$$-\langle q, \underline{n} \rangle \simeq \frac{Q_1}{A_1}$$

$$\text{Donc : } k\frac{\overline{T_1} - T_1}{e} = + \frac{Q_1}{A_1} \overset{Q15)}{=} -s\frac{Q_3}{A_3} = -s\phi$$

$$\Rightarrow T_1 = \overline{T_1} + s\frac{\phi e}{k}$$

Q19) Avec les données numériques, on obtient avec la calculatrice :

$T_1 = 294.28K$; $T_3 = 829.57K$

C'est très proche des valeurs calculées par ANSYS et ce d'autant plus que L augmente, ce qui est logique puisque l'on est alors très proche de la situation où $L >> e$.

Q20) Réponse 3)