DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées ainsi que les calculatrices ne permettant pas de communications interne et/ou externe.

L'usage d'autres moyens électroniques (ordinateur, téléphone, traducteur automatique etc.) est interdit.

Les deux problèmes I et II sont à rendre sur des feuilles séparées.

L'ensemble des questions représente un total de 25 points. L'examen sera noté sur 20, sans appliquer de règle de trois. Il y a donc 5 points bonus.

Problème I – Méthode des volumes finis en transfert thermique et mécanique des fluides (10 pts)

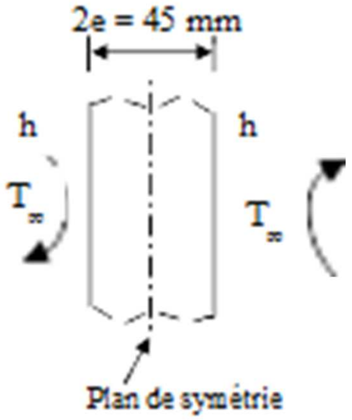
On considère une plaque métallique dont l'épaisseur 2e est faible devant les autres dimensions (2e = 45 mm).

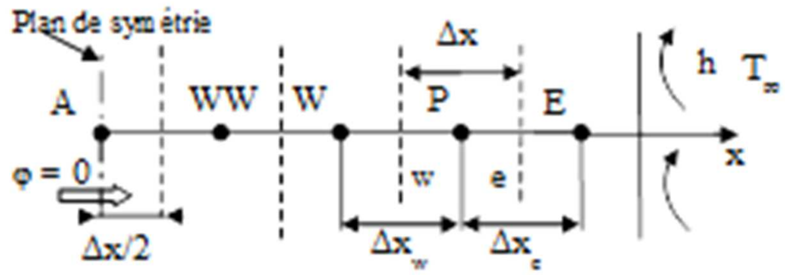
La masse volumique du métal est $\rho = 8000$ kg.m^{-3}, la capacité thermique massique $c_{th} = 500$ J.kg^{-1}.K^{-1} et sa conductivité est $\lambda = 60$ W.m^{-1}.K^{-1}.

La plaque est à une température initiale $T^0 = 225$ °C.

On effectue un traitement thermique en la plongeant brutalement dans un bain à température $T_\infty = 25$ °C. T_∞ est maintenue constante tout au long de l'opération.

Le refroidissement s'effectue par convection de façon identique sur ses deux faces (h = 500 W.m^{-2}.K^{-1}).





La face ouest (w) du demi-volume A est le plan de symétrie de l'élément. Par conséquent, le flux thermique surfacique à travers cette face est nul.
La face est (e) du volume de centre E est la face où s'effectue le transfert par convection avec le fluide.

1) On choisit de calculer l'évolution des températures avec un schéma explicite et un pas de temps de 20 s. Qu'en pensez-vous ?

2) On décide finalement de faire l'étude avec un schéma implicite et un pas de temps de 20 s.
a) Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant la température pour les 5 volumes.
b) Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.
c) Calculer la distribution des températures. Vous ne donnerez que les distributions à 20 s et à 120 s.

3) Traiter la question précédente de façon identique avec un schéma de Crank-Nicholson en utilisant le même pas de temps (20s).

4) Une étude analytique montre que la température au centre de la plaque au bout de 120 s est de 135,25 °C. Comment se situent vos résultats par rapport à cette valeur ?

PROBLÈME II – TRANSFERT THERMIQUE (15 POINTS)

On considère une cavité délimitée par un triangle isocèle situé dans le plan (x,y) (Figure 1). Les deux côtés égaux, de longueur L, forme un angle α. La longueur X de la base du triangle se déduit facilement de L et α. Chaque côté du triangle (labellisé C_1, C_2 et C_3 sur la figure) rayonne thermiquement au sein de la cavité avec une émissivité ε.

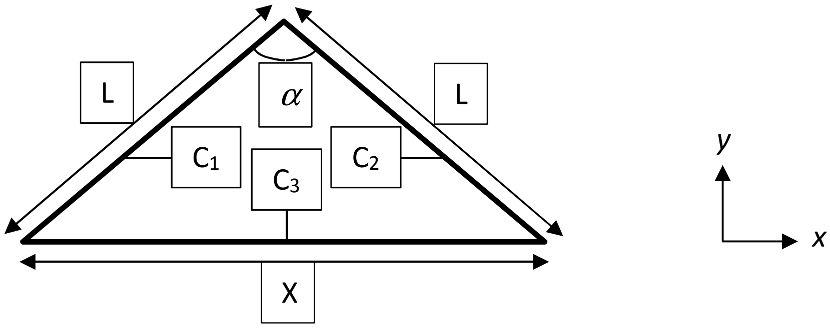


Figure 1 – *Cavité radiative délimitée par un triangle isocèle*

On rappelle deux des propriétés fondamentales concernant les facteurs de forme F_{ij} entre deux surfaces i et j, respectivement d'aires A_i et A_j (m²) :

$$\sum_{j=1}^{3} F_{ij} = 1 \; ; i = 1,2,3 \qquad (1) \qquad\qquad A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \; ; \; i = 1,2,3, \; j = 1,2,3 \qquad (2)$$

<u>N.B.</u> : Dans le cas présent, le coefficient F_{ij} représente le facteur de forme entre les côtés C_i et C_j et les aires impliquées dans la formule (2) correspondent aux longueurs des côtés.

Q1) (0.25 point) Calculer les facteurs de forme F_{11}, F_{22} et F_{33}

Q2) (0.25 point) En utilisant l'équation (1) et la question Q1), exprimer F_{12} en fonction de F_{13}.

Q3) (0.25 point) En utilisant l'équation (2), exprimer F_{21} en fonction de F_{12}.

Q4) (0.25 point) En utilisant l'équation (1) et les questions Q1) et Q3), exprimer F_{23} en fonction de F_{12}.

Q5) (0.25 point) En utilisant la symétrie du problème, exprimer F_{32} en fonction de F_{31}.

Q6) (0.25 point) En utilisant l'équation (1) et les questions Q1) et Q5), montrer que : $F_{31} = \frac{1}{2}$

Q7) (0.25 point) Déduire des questions Q5) et Q6) que : $F_{32} = \frac{1}{2}$

Q8) (0.25 point) Montrer que : $X = 2L\, sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q9) (0.5 point) En utilisant l'équation (2) et les questions Q6) et Q8), montrer que : $F_{13} = sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q10) (0.25 point) Déduire des questions Q2) et Q9) que : $F_{12} = 1 - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q11) (0.25 point) Déduire des questions Q3) et Q10) que : $F_{21} = 1 - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Q12) (0.25 point) Déduire des questions Q4) et Q10) que : $F_{23} = sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

On note T_1, T_2 et T_3 les températures des côtés C_1, C_2 et C_3. Compte tenu de la symétrie du problème décrit par la Figure 1, on supposera que : $T_1=T_2$.

Q13) (1.5 point) Donner les trois équations qui gèrent les transferts radiatifs entre les trois côtés de la cavité triangulaire de la Figure 1. On se servira des valeurs des facteurs de forme calculées dans les questions précédentes pour écrire ces trois équations uniquement en fonction de l'émissivité ε ; des flux (W/m^2) perdus par les trois côtés $\frac{Q_1}{A_1}$, $\frac{Q_2}{A_2}$ et $\frac{Q_3}{A_3}$; de l'angle α; de la constante de Stefan-Boltzmann σ et enfin des températures T_1 et T_3 des côtés 1 et 3. Les trois équations demandées seront respectivement identifiées par les notations (C1), (C2) et (C3).

Q14) (2 points) En soustrayant (C2) à (C1), montrer que : $\frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2}$. Ce résultat vous parait-il logique ? Justifier votre réponse.

Q15) (2 points) En utilisant le résultat de la question Q14) et en combinant les équations (C1) et (C3) de la manière suivante : $(\mathrm{C}_1) + sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times (\mathrm{C}_3)$, montrer que : $\frac{Q_1}{A_1} = -sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{Q_3}{A_3}$

Q16) (1 point) Les pertes compensant les gains dans la cavité, on a le bilan énergétique suivant en W :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

A partir de ce bilan, et en utilisant les questions Q8) et Q14), établir une relation liant $\frac{Q_1}{A_1}$, $\frac{Q_3}{A_3}$ et $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Comparer avec la question Q15).

Q17) (2 points) En reportant dans l'équation (C3) les résultats obtenus dans les questions Q14) et Q15), exprimer la température T_3 en fonction de T_1, ε, σ, α et $\frac{Q_3}{A_3}$.

On associe désormais à la cavité radiative de la Figure 1 une tranche de matière d'épaisseur e entourant cette cavité (Figure 2). Le matériau solide constituant la tranche de matière possède une conductivité k. Les côtés égaux du triangle isocèle externe ont une température imposée $\overline{\mathbf{T}}_1$ et la base est soumise à un flux de chaleur Φ. Les températures T_1, T_2 et T_3 seront relevées au centre de chaque côté interne.

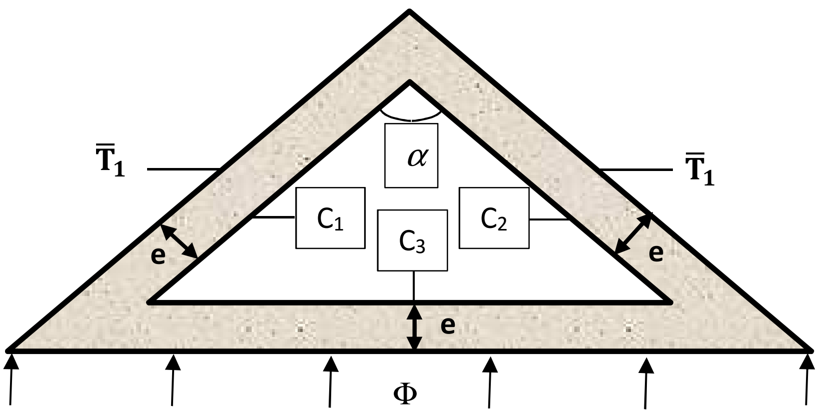


Figure 2 – *Cavité radiative délimitée par un triangle isocèle et entourée de matière*

Q18) (1.25 point) On suppose que e est très petit devant L, de sorte que l'on peut admettre que $\frac{Q_3}{A_3} = \Phi$. En utilisant une équation en conduction ainsi que la question Q15), exprimer la température T_1 en fonction de $\overline{T}_1$, α, Φ, e et k.

Q19) (1 point) Un calcul éléments finis a été réalisé avec logiciel ANSYS afin de résoudre le problème thermique décrit par la Figure 2. Les données numériques utilisées sont : α=80°, $\overline{T}_1 = 293$ K, ε=0.5, Φ=10^4 W/m^2, e=10^{-2} m, k=50 W/(m.K) et σ=5.67 10^{-8} W/(m^2 K^4). Les résultats éléments finis obtenus pour différentes valeurs de L sont présentés dans le Tableau 1. Comparer et discuter ces résultats en effectuant une application numérique à l'aide des formules obtenues aux questions Q17) et Q18).

L (m)	T1 (K)	T3 (K)
1	294	813.1
2	294.2	822.4
4	294.3	825.2
8	294.3	827.5

Tableau 1 – *Résultats numériques ANSYS*

Q20) Afin de gérer le transfert radiatif, l'utilisateur du logiciel ANSYS a appliqué sur chacun des trois côtés du triangle interne un paramètre « *Enclosure number* » égal à 2 (Figure 3).

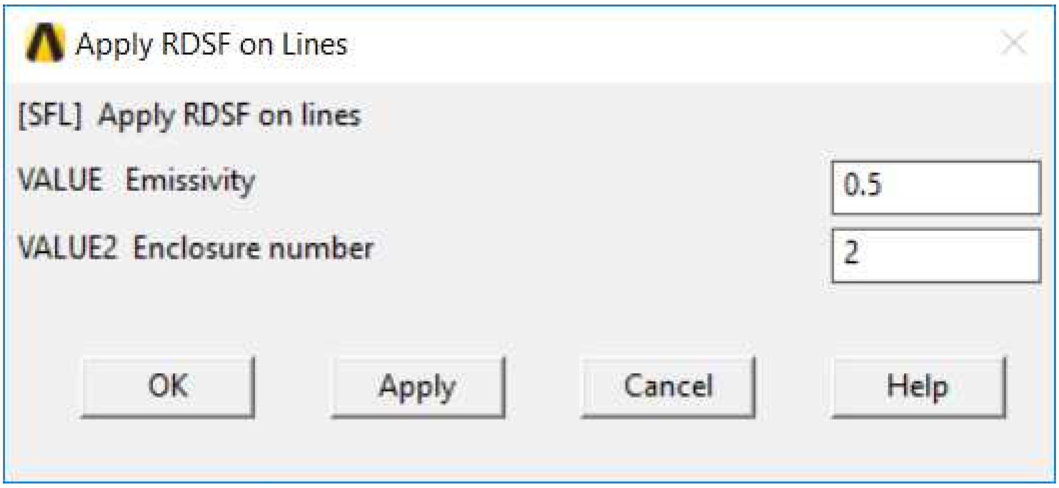


Figure 3 – *Menu ANSYS*

Choisissez une seule réponse parmi les quatre proposées ci-dessous (**N.B. : Bonne réponse : 1 point ; Pas de réponse : 0 point ; Mauvaise réponse : – 0.5 point)**

1) L'utilisateur a fait une erreur. Comme la cavité est un triangle, il aurait dû choisir la valeur 3.
2) L'utilisateur a fait une erreur. Comme il n'y a qu'une seule cavité, il aurait dû choisir la valeur 1.
3) L'utilisateur aurait pu prendre n'importe quelle valeur entière positive. Ce qui compte, c'est que cette valeur soit la même pour toutes les lignes délimitant la cavité.
4) L'utilisateur a fait une erreur. Il aurait dû choisir –2 (l'opposé de 2) et créer le matériau numéro 2 contenant l'émissivité comme propriété matérielle.