DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées ainsi que les calculatrices ne permettant pas de communications interne et/ou externe.

L'usage d'autres moyens électroniques (ordinateur, téléphone, traducteur automatique etc.) est interdit.

Les sujets 1 et 2 sont à rendre sur des feuilles séparées.

SUJET 1

MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN TRANSFERT THERMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES (10 POINTS)

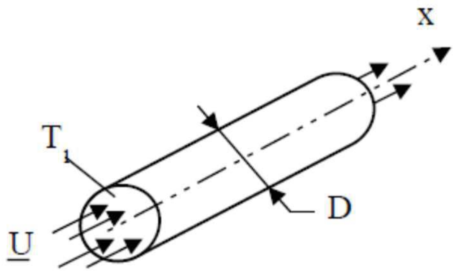
Le travail proposé ici consiste à compléter l'étude faite en TD en envisageant deux nouvelles approches.

Pour mémoire, on considère un tronçon de conduite de longueur L et de section circulaire constante dans laquelle s'écoule de l'eau. La paroi interne de la conduite a une température constante T_c = 100°C alors que l'eau est à la température constante T_1 = 15°C à l'entrée de la conduite.

On souhaite caractériser le réchauffement de l'eau au fur et à mesure de son écoulement dans ce tronçon.

Les données sont :

- longueur L = 1 m,
- diamètre D = 1 cm,
- coefficient d'échange $h = 4.10^3$ $W.m^{-2}.K^{-1}$,
- conductivité thermique $\lambda = 0{,}6$ $W.m^{-1}.K^{-1}$,
- capacité thermique massique $c_{th} = 4.10^3$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$,
- masse volumique $\rho = 10^3$ $kg.m^{-3}$,
- vitesse d'écoulement $u = 1$ $m.s^{-1}$,



Les conditions sont donc les mêmes qu'en TD. On a vu que, dans ce cas, les termes diffusifs étaient négligeables devant les termes convectifs.
Vous pouvez utiliser ce résultat pour les deux approches étudiées ici.

Approche n°1.

La conduite est discrétisée en 5 volumes identiques selon le schéma vu en TD et on exploite le schéma amont au second ordre.
Rappel : Il s'écrit pour les faces w et e du volume de centre P:

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_W - \frac{1}{2}\Phi_{WW}, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_W \quad \text{si } u_w > 0 \text{ et } u_e > 0 \qquad \text{ou} \qquad \Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_E, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_E - \frac{1}{2}\Phi_{EE} \quad \text{si } u_w < 0 \text{ et } u_e < 0$$

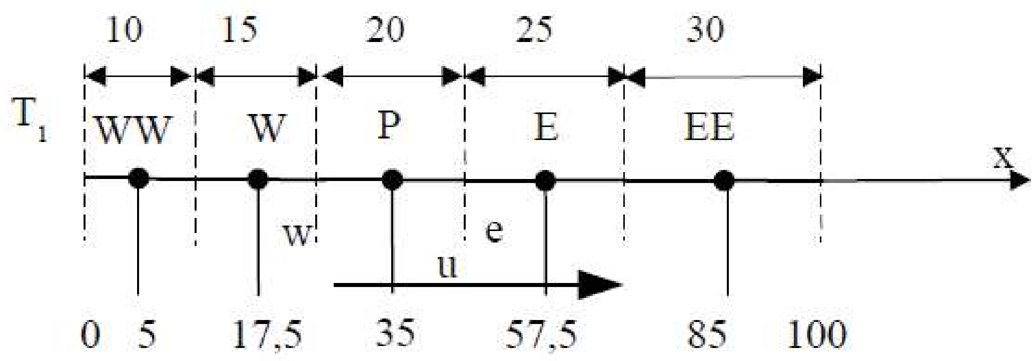
Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant la température pour les 5 volumes.

Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.

Calculer la distribution des températures aux différents nœuds.

Approche n°2.

La conduite est discrétisée en 5 volumes de taille croissante auxquels on applique le schéma amont.



Les cotes et abscisses sont données en cm.

Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant la température pour les 5 volumes.

Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.

Calculer la distribution des températures aux différents nœuds.

Comparaison.

Comparer les résultats des deux approches avec les valeurs analytiques en calculant l'écart en pourcentage en valeur absolue puis commenter.

On rappelle les valeurs analytiques :

T_{WW}	T_W	T_P	T_E	T_{EE}
18,33	24,61	30,41	35,76	40,7

SUJET 2

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Exercice (6 pts)

Considérons une poutre en flexion simple, bi-encastrée avec une force concentrée au milieu (voir Fig.). La longueur de la poutre est 2L, le moment d'inertie I et le module d'Young E. Il y a 2 éléments finis, chacun de longueur L, et 3 nœuds. La poutre est encastrée aux nœuds 1 et 3. On applique une force concentrée P au nœud 2.

- Déterminer les degrés de liberté **u**. (1 pt)
- Calculer les matrices de rigidité élémentaires et les seconds membres élémentaires. (1 pt)
- Faire l'assemblage des matrices de rigidité et des seconds membres. (2 pts)
- Imposer les conditions aux limites. (1 pt)
- Résoudre le système **K u = f** et calculer les ddl **u** (en fonction de P, L, E, I). (1 pt)

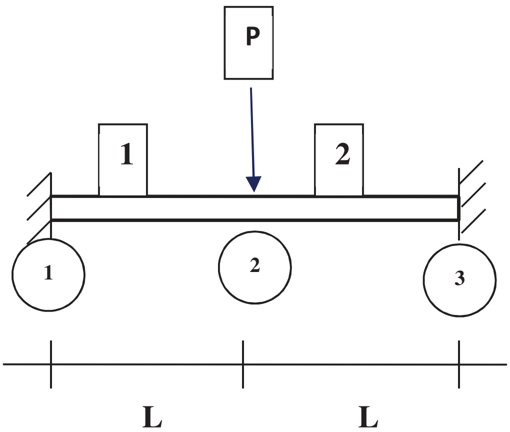


Fig.

On rappelle la matrice de rigidité d'un élément de poutre en flexion simple :

$$K^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Questions de cours (4 pts)

Choisir une bonne réponse.

1. Dans l'élément CST (Constant Strain Triangle),
   A. les contraintes sont linéaires
   B. les déplacements sont linéaires
   C. les déplacements sont constants

2. Dans l'élément LST (Linear Strain Triangle),
   A. les déplacements sont quadratiques
   B. les déplacements sont linéaires
   C. les contraintes sont quadratiques

3. Dans la convergence de type *p* (augmentation du degré du polynôme d'approximation) de la méthode des éléments finis,
   A. le nombre d'éléments augmente
   B. le nombre d'éléments et de degrés de liberté augmentent
   C. le nombre de degrés de liberté augmente

4. Afin d'effectuer une intégration numérique en 1D par la méthode de Gauss avec 4 points de Gauss, il faut résoudre
   A. un système de 4 équations algébriques
   B. un système de 6 équations algébriques
   C. un système de 8 équations algébriques