MN52 Final P2022

mardi 20 juin 2022 - 1h30

PARTIE I SUR COPIE SEPAREE

Exercice 1 : Etude d'un portique - 10 points

Soit un portique constitué de deux poutres AB et BC. Le portique est encastré en A et en C. On suppose que chaque poutre a une longueur L , une section S et son moment quadratique par rapport à l'axe des z est noté I. La structure est supposée élastique et isotrope de module d'Young E constant et de coefficient de Poisson ν. Le portique est soumis à une charge linéique notée f constante sur la partie AB (cf figure 1) :

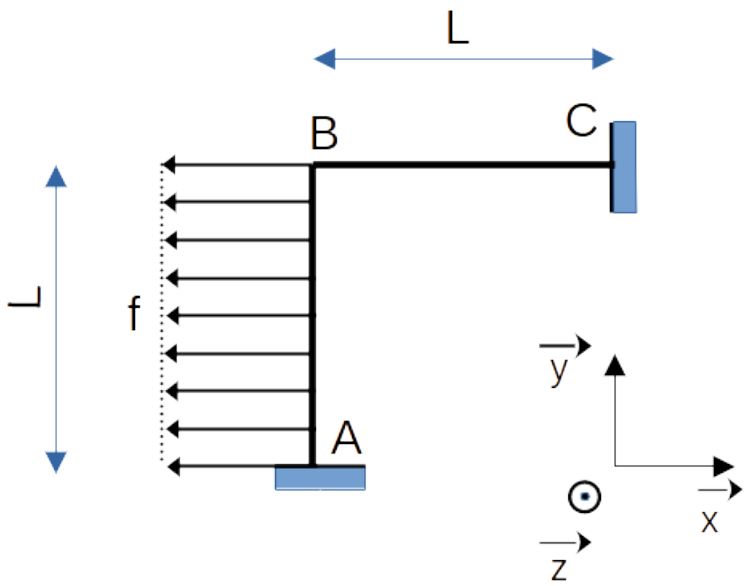

FIGURE 1 – Portique soumis à une répartition linéique constante f sur AB

On s'intéresse à la réponse statique de ce portique plan représenté à la figure (1).

On ne néglige pas l'effort normal, ce qui implique 3 degrés de liberté par nœuds que l'on notera : (u_i, v_i, θ_i) avec u_i le déplacement horizontal, v_i le déplacement vertical et θ_i la rotation autour de l'axe $\vec{z}$.

On résout ce problème en flexion simple et traction-compression par la méthode des éléments finis. Pour chaque poutre du portique on utilisera un élément fini à deux nœuds.

On posera : $\alpha = \dfrac{ES/L}{EI/L^3}$

On choisit la numérotation suivante :

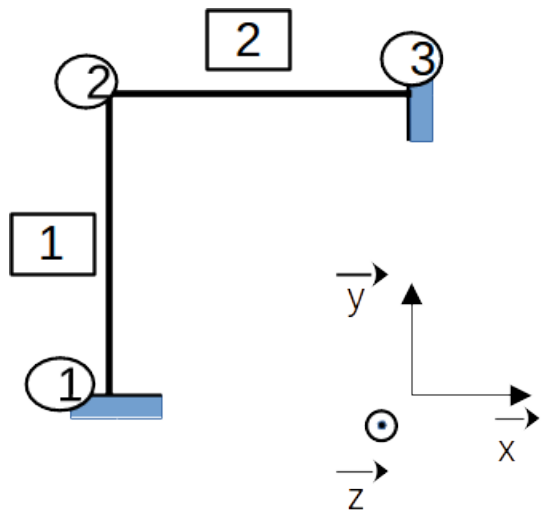

FIGURE 2 – Numérotation éléments et nœuds

1. Préciser sur la figure (2) ci-dessus les inconnues de réactions. 0.25 point
2. Définir vos inconnues aux nœuds. 0.25 point
3. La poutre BC, élément $\boxed{2}$, est horizontale, elle travaille en flexion simple et en traction. En utilisant les matrices vues en cours, écrivez la matrice de rigidité due à la flexion puis la matrice de rigidité due à la traction. 1 point
4. La poutre AB, élément $\boxed{1}$, est verticale et elle travaille en flexion simple et en traction. La matrice due à la flexion simple s'écrit dans le repère global (on a fait une transformation d'angle +90°) :

$$\frac{EI}{L^3}\begin{pmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad \text{sur} \quad \langle u_1\,,\,\theta_1\,,\,u_2\,,\,\theta_2\rangle$$

   Ecrire la matrice de rigidité due à la traction. 0.5 point
5. Montrer que le vecteur des forces équivalent pour la poutre AB due à la force linéique

s'écrit dans le repère global. 1 point :

$$-f \begin{pmatrix} \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{-L^2}{12} \\ \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{L^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{suivant} \quad \langle u_1\,,\,\theta_1\,,\,u_2\,,\,\theta_2 \rangle$$

6. Ecrire le système global. 1 point
7. Introduire les conditions limites. 0.5 point
8. Montrer que après réduction le système à résoudre s'écrit : 0.5 point

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12+\alpha & 0 & 6L \\ 0 & 12+\alpha & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -fL/2 \\ 0 \\ -fL^2/12 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{ES/L}{EI/L^3} \tag{1}$$

La solution de ce système (1) est :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{fL^4}{EI(3+\alpha)(12+\alpha)} \begin{pmatrix} \dfrac{-(48+7\alpha)}{16} \\ \dfrac{-(24-\alpha)}{16} \\ \dfrac{(24-\alpha)(12+\alpha}{96L} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dans le reste de l'exercice, on prend $\alpha = 2$.

9. Calculer alors les inconnues nodales. 0.5 point
10. Calculer les réactions d'appuis. 1.5 point
11. Vérifier l'équilibre global du portique. 1.5 point
12. En utilisant les lois de comportement vues en cours, l'expression de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans les deux éléments est :

$$\text{sur } \boxed{1} \begin{cases} N_1 = \dfrac{ES}{L} v_2 \;=\; -\dfrac{11}{280} fL \\[2ex] M_{f1} = EI\left((\frac{-6}{L^2} + \frac{12y}{L^3}) u_2 \;+\; (\frac{4}{L} + \frac{6y}{L^2}) \theta_2 \right) = -\dfrac{fL}{840}(327y - 202L) \\[2ex] T_1 = -\dfrac{M_{f1}}{dy} = \dfrac{109}{280} fL \end{cases}$$

$$\text{sur } \boxed{2} \begin{cases} N_2 = \dfrac{31}{280} fL \\ M_{f2} = \dfrac{11}{560} fL(2x - \frac{10}{3}L) \\ T_2 = -\dfrac{11}{280} fL \end{cases}$$

Calculer le moment fléchissant au nœud 2 dans chaque élément. Que constate-t-on ? 0.5 point

13. Ce modèle vous paraît-il satisfaisant ? Que peut-on faire pour diminuer les discontinuités au point B . 1 point

Exercice 2 : Méthode numérique de Gauss 2 points

1. Calculer en détaillant votre calcul, la valeur exacte de l'intégrale sur le triangle rectangle isocèle de côté 1 de la fonction suivante : 0.75 point

$$f(\xi, \eta) = \xi^2 \eta$$

2. Calculer la valeur de cette intégrale avec la méthode de Gauss pour $m = 3$ et $g = 4$. On rappelle que : 0.5 point

$$\xi_1 = \frac{1}{3} \qquad \xi_2 = \frac{1}{5} \qquad \xi_3 = \frac{3}{5} \qquad \xi_4 = \frac{1}{5}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \qquad \eta_2 = \frac{1}{5} \qquad \eta_3 = \frac{1}{5} \qquad \eta_4 = \frac{3}{5}$$

$$\omega_1 = \frac{-27}{96} \qquad \omega_2 = \frac{25}{96} \qquad \omega_3 = \frac{25}{96} \qquad \omega_4 = \frac{25}{96}$$

3. Que constate-t-on ? 0.25 point
4. Est-ce que cela était prévisible ? Justifier votre réponse. 0.5 point