Signature :

Nom : ____________ Prénom : ____________ INE : ____________

Formation : ____________ Numéro de place : ______

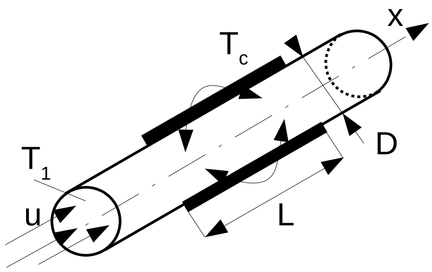
Niveau : ____________ Filière : ____________

## Méthode des volumes finis en transfert thermique et mécanique des fluides (14 pts.)

Le travail proposé ici est similaire à l'étude faite en TD. Ainsi, comme en TD, **les termes diffusifs sont négligeables devant les termes advectifs** dans le cas présent.
Vous pouvez utiliser ce résultat pour les deux approches proposées ici.

On considère un tube de section circulaire constante dans lequel circule de l'eau.
On dispose sur un tronçon de longueur L du tube un manchon chauffant. Au droit du manchon, la paroi interne de la conduite est à une température constante $\boldsymbol{T_c = 100°C}$.

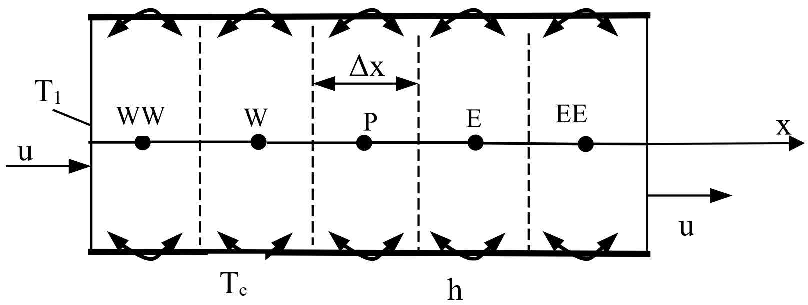
Les données suivantes sont communes aux 2 approches :
- longueur du manchon chauffant L = 1 m,
- diamètre intérieur de la conduite D = 2 cm,
- conductivité thermique $\lambda = 0,6\ W.m^{-1}.K^{-1}$,
- capacité thermique massique $c_{th} = 4,18.10^3\ J.kg^{-1}.K^{-1}$,
- masse volumique $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$,
- coefficient d'échange $h = 2,09.10^3\ W.m^{-2}.K^{-1}$
- vitesse d'écoulement $u = 0,1\ m.s^{-1}$.
- $T_1 = 15°C$ à l'entrée du manchon (température constante).
- $T_c = 100°C$ sur la paroi interne de la conduite sur la longueur L (température constante).




On effectue ici l'étude d'un problème stationnaire.

L'objectif du travail est de caractériser le réchauffement de l'eau au fur et à mesure de son passage dans le tronçon au contact du manchon de chauffage.
Pour cela, on envisage deux approches différentes.

1) Approche n°1.
La conduite sera discrétisée en 5 volumes identiques selon le schéma suivant :




On choisit d'utiliser pour les termes advectifs, un schéma tel que pour les **faces e et w** du **volume de centre i** compte tenu du sens d'écoulement :

$$T_e = T_i + \frac{1}{2}\left(T_i - T_{(i-1)}\right) \quad \text{et} \quad T_w = T_{(i-1)} + \frac{1}{2}\left(T_{(i-1)} - T_{(i-2)}\right)$$

Les indices varient dans le sens de l'axe des abscisses.

a) Écrire l'expression littérale de l'équation bilan pour le volume de centre P que vous exprimerez en fonction des coefficients a et c où a est le coefficient du terme advectif, tel que $a=\frac{1}{4}\rho\, c_{th}\, u\, D$ et c celui du terme source tel que $c=h\Delta x$ . Mettez l'équation en forme de façon à faire apparaître le rapport c/a.

b) En déduire les équations littérales des autres volumes en faisant apparaître le rapport c/a.

c) On remarque que le jeu d'équations est de la forme [A].[$T_i$] = [C]. Donnez l'expression littérale des matrices [A] et [C] en faisant apparaître le rapport c/a.

d) Calculer le rapport c/a.

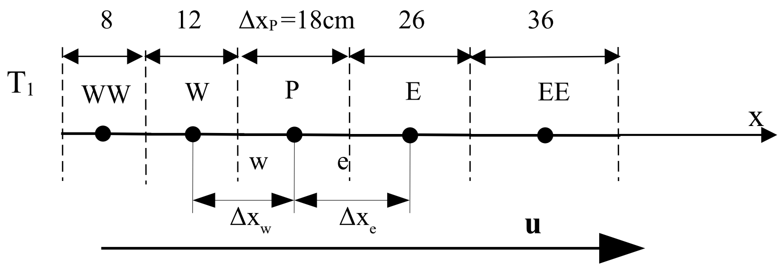
e) Déterminer la distribution des températures aux différents nœuds.

| | $T_{WW}$ | $T_W$ | $T_P$ | $T_E$ | $T_{EE}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_{num}$(°C) | | | | | |

f) Déterminer la distribution des températures aux différents nœuds fournie par la solution analytique : $T(x)=T_c+\left(T_1-T_c\right)e^{-\left(\frac{4h}{\rho c_{th} u D}\right)x}$ et comparer les deux distributions en calculant l'écart en pourcentage en valeur absolue $|\%\,écart| = \frac{T_{num}-T_{an}}{T_{an}} * 100$ . Commenter.

| | $T_{WW}$ | $T_W$ | $T_P$ | $T_E$ | $T_{EE}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_{an}$(°C) | | | | | |
| $\|\%\,écart\|$ | | | | | |

2) <u>Approche n°2.</u>
Le tronçon sera discrétisé en 5 volumes de taille différente selon le schéma suivant :




**Les cotes sont données en cm, le sens d'écoulement reste le même.**
On choisit un schéma amont du second ordre pour les termes advectifs.

Il s'écrit pour les faces w et e du volume de centre P, compte tenu du sens d'écoulement : $T_w=\frac{3}{2}T_W-\frac{1}{2}T_{WW}$ $T_e=\frac{3}{2}T_P-\frac{1}{2}T_W$

a) Écrire l'équation littérale du volume de centre P dans ces conditions en faisant apparaître le nouveau rapport c/a où a est le coefficient du terme advectif, tel que $\boldsymbol{a=\frac{1}{4}\rho\, c_{th} u D}$ , identique au cas précédent. Le coefficient du terme source c est **<u>désormais égal à h</u>** : $\boldsymbol{c=h}$ .
**Vous noterez $\Delta x_i$ la largeur du volume de centre i.**

b) En déduire les équations littérales des autres volumes en faisant apparaître le rapport c/a.

c) Le jeu d'équations est toujours de la forme [A].[$T_i$] = [C]. Donnez l'expression littérale des matrices [A] et [C] en faisant apparaître le rapport c/a.

d) Calculer le nouveau rapport c/a.

e) Déterminer la distribution des températures aux différents nœuds.

| | $T_{WW}$ | $T_W$ | $T_P$ | $T_E$ | $T_{EE}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_{num}$(°C) | | | | | |

f) Comparer cette nouvelle distribution des températures avec les résultats analytiques calculés aux mêmes abscisses et commenter.

| | $T_{WW}$ | $T_W$ | $T_P$ | $T_E$ | $T_{EE}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_{an}$(°C) | | | | | |
| $\lvert\% \, \acute{e}cart\rvert$ | | | | | |