MN52 Final P2025

lundi 23 juin 2024 - 1h30

PARTIE I SUR COPIE SEPAREE

Préliminaire pour l' étude d'un portique en traction + flexion

La description de l'élément de barre à 2 nœuds et l'élément de poutre continue de Bernouilli, nous donne l'élément de poutre 2-D avec 3 ddl par nœud : deux déplacements et une rotation.

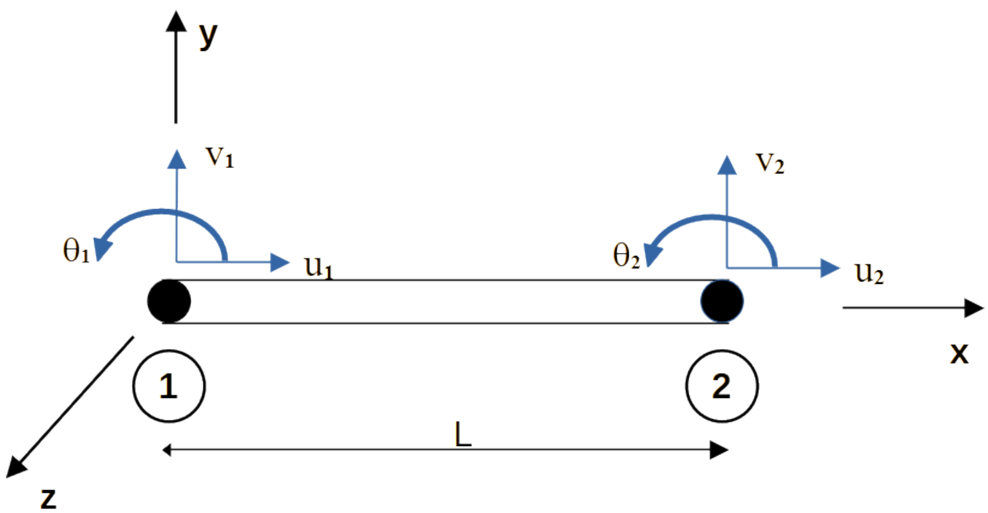

FIGURE 1 – Elément fini de poutre 2-D (portique plan)

Le nombre de ddl par élément est donc de 6 : $\{u_1\,,\,v_1\,,\,\theta_1\,,\,u_2\,,\,v_2\,,\,\theta_2\}$

La matrice de rigidité élémentaire K_e s'obtient en combinant la matrice de la barre en traction-compression et la matrice de la poutre en flexion, pour une poutre de longueur L de section A, de module d'Young E et de moment quadratique par rapport à l'axe des z noté I :

$$K_e = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right) \tag{1}$$

Si la poutre est inclinée d'un angle α, c'est-à-dire qu'il y a un angle α entre le repère de la poutre (repère local)$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{Z})$ et le repère global $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, il faut introduire une matrice de rotation que l'on notera T :

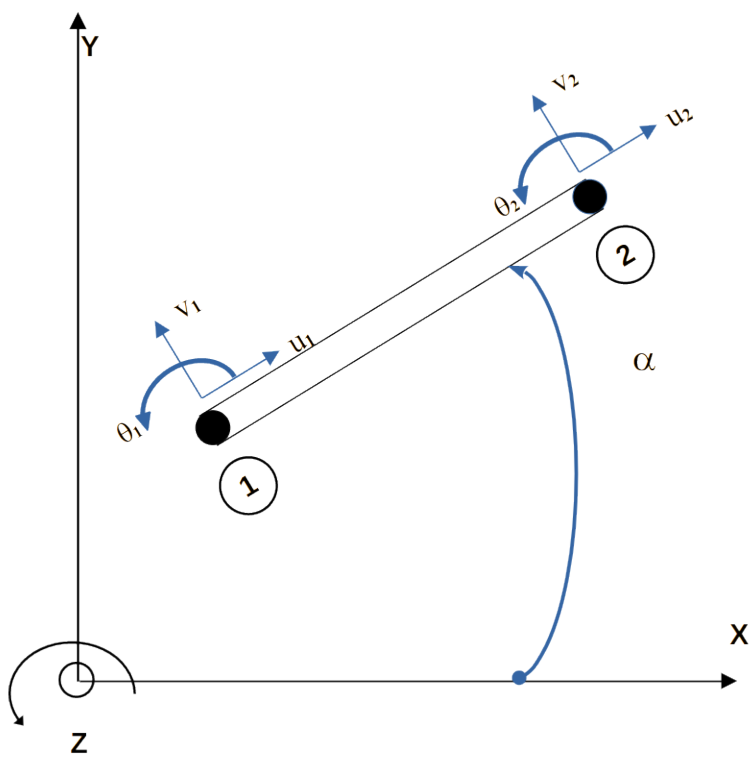

FIGURE 2 – Poutre 2-D dans le repère global $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

La matrice de rotation d'angle α autour de l'axe des Z s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice de rigidité dans le repère global s'écrit donc :

$$K_g = T^t K_e T \tag{3}$$

où T^t représente la matrice transposée de T et K_e est la matrice définie par (1).

Exercice 1 : Etude d'un portique en traction + flexion 10 points

Soit le portique suivant formé de deux éléments poutres élancées et de trois nœuds. Le nœud ① est en appui simple et le nœud ③ est encastré. La poutre $\boxed{1}$ est horizontale et la poutre $\boxed{2}$ est verticale.

Le chargement consiste en une force P concentrée au nœud ②. La rigidité en flexion EI, la section A et la longueur L des deux éléments sont identiques. On cherche à déterminer les déplacements et les réactions dans cette structure.

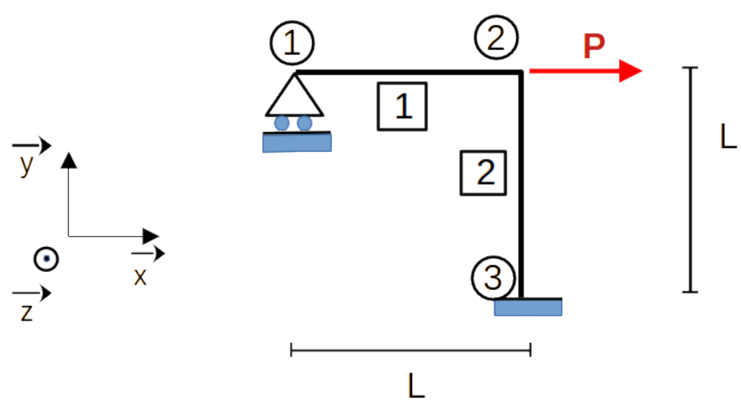

FIGURE 3 – Portique

1. Faire une figure en précisant les inconnues de réactions. 0.25 point
2. Sur votre dessin préciser vos inconnues aux nœuds. 0.25 point

3. On pose :

$$a = \frac{EA}{L}\,;\, b = \frac{12EI}{L^3}\,;\, c = \frac{6EI}{L^2}\,;\, d = \frac{4EI}{L}\,;\, e = \frac{2EI}{L} \tag{4}$$

   Ecrire la matrice élémentaire de rigidité sur l'élément $\boxed{1}$ en utilisant la matrice K_e donnée par l'équation (1). 0.5 point

4. Pour l'élément $\boxed{2}$, l'angle α entre le repère local de la poutre et le repère global est $-90°$. En déduire l'expression de la matrice de rotation donnée par l'équation (2).0.5 point

5. Ecrire la matrice de rigidité sur l'élément $\boxed{2}$ dans le repère global donnée par l'équation (3) en fonction de a, b, c, d et e. 1 point

6. Ecrire le système global. 1.5 point

7. Introduire les conditions limites. 0.5 point

8. Montrer que après réduction le système à résoudre s'écrit : 1 point

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & -c & e \\ -a & 0 & a+b & 0 & c \\ 0 & -c & 0 & a+b & -c \\ 0 & e & c & -c & 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

9. Données du problème :

$$E = 200\,GPA\,,\; I = 60.10^6\,mm^4\,,\; A = 600\,mm^2\,,\; L = 6\,m\,,\; P = 5KN$$

   Calculer a , b, c , d et e et préciser les unités. 0.5 point

10. Calculer les inconnues nodales au millième près et préciser les unités. 1.5 point

11. Calculer les réactions d'appuis. 1.5 point

12. Vérifier l'équilibre global de la poutre. 1 point