

MN52 - FINAL P2026 - PARTIE SOLIDE

Exercice 1 : 4 points

On considère une structure en béton modélisée par un triangle rectangle isocèle avec une base et une hauteur de longueurs $2a$ (Figure 1). La structure est encastree sur sa base et soumise à une pression linéique **constante** $\vec{p} = -p\vec{y}$ répartie sur le côté incliné.

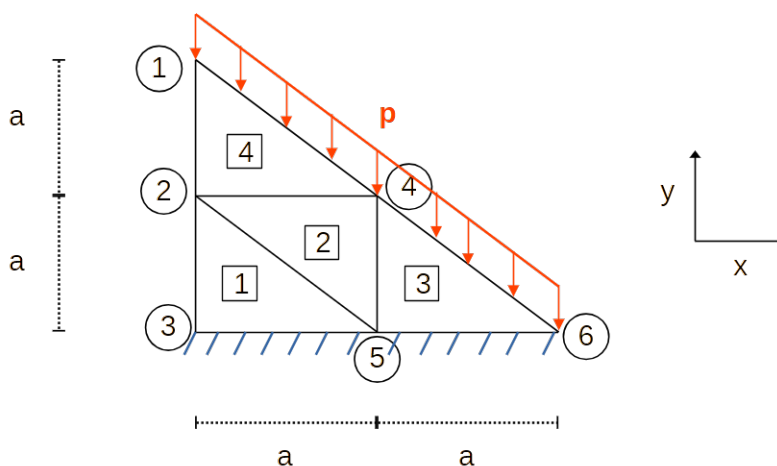


FIGURE 1 – charge linéique constante sur un plan incliné

La structure est maillée avec 4 éléments triangulaires à 3 nœuds (Constant Strain Triangle) en **déformation plane**. On applique une pression constante sur le côté ① - ④- ⑥ :

On rappelle les fonctions de forme de l'élément triangulaire à 3 noeuds dans le repère de référence $(\hat{X}, \hat{Y})$:

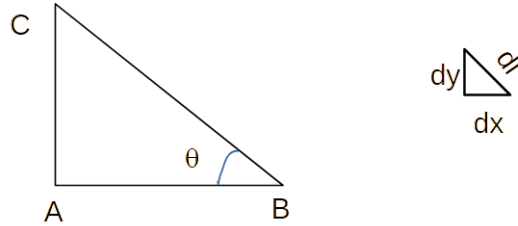
$$\begin{cases} N_1(\hat{X}, \hat{Y}) = 1 - \hat{X} - \hat{Y} \\ N_2(\hat{X}, \hat{Y}) = \hat{X} \\ N_3(\hat{X}, \hat{Y}) = \hat{Y} \end{cases} \quad 0 \leq \hat{X} \leq 1 \quad 0 \leq \hat{Y} \leq 1 \quad (1)$$

On rappelle aussi que le déterminant de la matrice jacobienne est :

$$\det(J) = 2A^e \quad \text{où } A^e \text{ est l'aire du triangle} \quad (2)$$

Le but de cet exercice est de calculer la force équivalente à cette répartition linéique. La difficulté vient que l'on doit intégrer sur le long de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle.

Rappel : Calcul d'une intégrale sur le côté $[BC]$



$$\int_B^C \alpha dl = \int_A^B \alpha \frac{dx}{\cos \theta} = \int_A^C \alpha \frac{dy}{\sin \theta} \quad (3)$$

1. Montrer que la répartition linéique est équivalente à des forces concentrées aux nœuds ① et ④ (Figure 2) à la place de la pression répartie. Les valeurs de ces forces concentrées sont : **2.5 points**

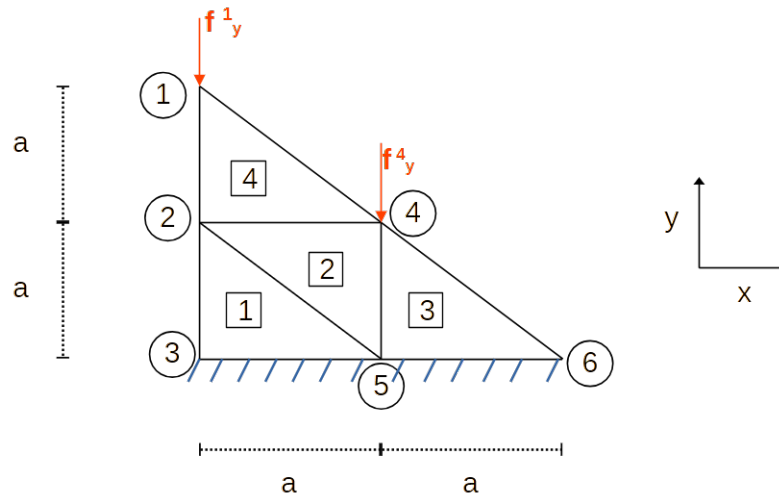


FIGURE 2 – Charge équivalente aux nœuds

$$f_y^1 = -p \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad \text{et} \quad f_y^4 = -p \sqrt{2}a \quad (4)$$

2. Pourquoi n'impose-t-on pas de force équivalente au nœud ⑥. **0.5 point**
3. Calculer la somme des forces équivalentes aux nœuds ①, ④ et ⑥. **0.5 point**
4. Comparer avec la force correspondante à la répartition p sur le côté incliné. **0.5 point**

Exercice 2 : Poutre en flexion avec déplacement imposé 7 points

Soit une poutre AB de longueur $2L$ encastrée en A et en appui simple en B . On impose au milieu de cette poutre noté C un déplacement vertical égal à $-d$ avec $d > 0$. On note E son module d'Young et I son moment quadratique.

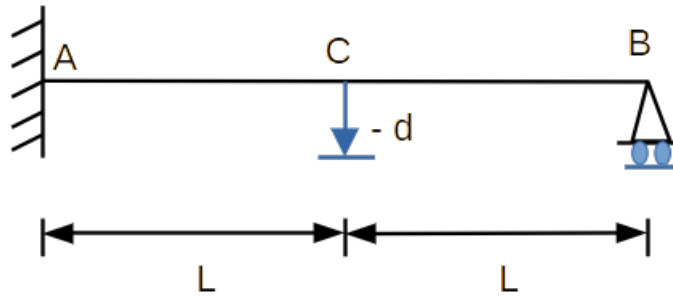


FIGURE 3 – poutre encastrée et appui simple - déplacement imposé au centre

On prend deux éléments de type poutre en flexion et on cherche à déterminer les différents degrés de liberté.

1. Faire un schéma en précisant les ddls et les réactions. **0.5 point**
2. Déterminer le vecteur des forces extérieures. **1 point**
3. Donner l'expression de la matrice de rigidité pour chaque élément. **1 point**
4. Donner l'expression de la matrice globale. **1 point**
5. Préciser les conditions limites. **0.5 point**
6. Donner l'expression de la matrice réduite. **1 point**
7. Calculer les déplacements verticaux ou la flèche et la rotation en chaque nœud. **1 point**
8. Calculer les réactions aux appuis. **1 point**
9. Sans utiliser les fonctions d'interpolation sur chaque élément, expliquer comment trouver l'expression des efforts internes sur l'élément 1 par exemple. **1 point**