

**N.B. :**

**Durée de l'examen : 2 heures**

**Chacun des 3 problèmes est à rendre sur une feuille séparée**

**Notes de cours, de TD et de TP autorisées**

## I PROBLÈME DE MÉCANIQUE DES STRUCTURES (7 POINTS)

Considérons un élément réel 1-D de barre en traction/compression ( $E$ -module de Young,  $A$ -aire de section,  $L$ -longueur) à trois nœuds et 1 d.d.l. par nœud avec un chargement axial réparti constant  $q$  (voir Fig.1). On rappelle l'équation différentielle gouvernant le problème

$$EA (d^2u/dx^2) + q = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

En utilisant une approximation quadratique du déplacement axial  $u(x)$  on obtient trois fonctions de forme suivantes :

$$N_1 = 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2,$$

$$N_2 = \frac{4}{L}x - \frac{4}{L^2}x^2,$$

$$N_3 = -\frac{1}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2$$

- Déterminer la matrice de rigidité  $\mathbf{K}^e$  de cet élément.
- Déterminer le second membre  $\mathbf{f}^e$  de cet élément.
- Pourquoi les trois forces équivalentes calculées dans  $\mathbf{f}^e$  sont-elles différentes ?

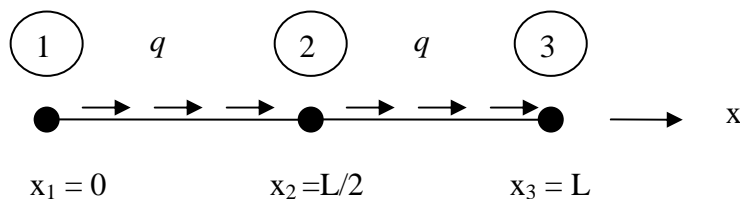
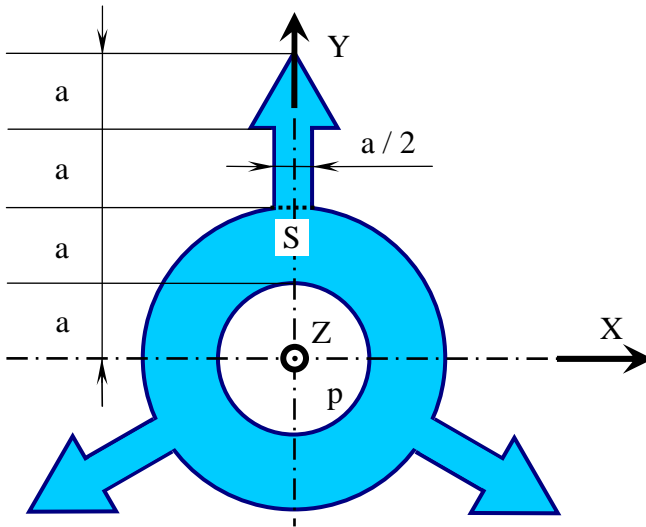


Fig.1

## II MODÉLISATION D'UNE PIÈCE TOURNANTE (8 POINTS)



La figure ci-contre représente la section d'un rotor de grande longueur qui tourne autour son axe Z à une vitesse constante  $\omega$ .

Il est constitué d'un cylindre central creux et de 3 parties saillantes identiques, uniformément réparties sur la circonférence, ressemblant chacune à une flèche constituée d'un rectangle et d'un triangle équilatéral.

Aucun effort n'est appliqué dans la direction de l'axe Z.

La partie centrale, creuse, est occupée par un gaz de refroidissement à la pression  $p$ .

A l'extérieur, c'est le vide.

Un calcul bidimensionnel par éléments finis de cette pièce est envisagé, avec ANSYS.

1. Compte tenu des symétries de la structure et de son chargement, quelle est la zone minimale à mailler ? La définir clairement par un croquis.
2. Indiquer un élément approprié pour mailler cette structure, en précisant l'option à choisir.
3. Quelles sont les conditions aux limites à prendre en compte ? Préciser la commande ANSYS qui permet de les imposer au modèle.
4. Quel sont les paramètres à indiquer pour que les chargements décrits ci-dessus (pression et rotation) soient bien pris en compte par le calcul ?
5. Si l'unité de longueur choisie pour définir la géométrie est le cm, quelles unités choisirez-vous pour les paramètres de la question précédente ? En quelles unités les contraintes et déplacements seront-ils alors calculés par ANSYS ?

Avant d'entreprendre la modélisation avec ANSYS, la tenue de la pièce est évaluée analytiquement.

6. Donner l'expression de la contrainte moyenne de traction  $\overline{\sigma}_s$  qui apparaît à la base des flèches (section S de la figure), en fonction uniquement de la dimension  $a$ , de la vitesse de rotation  $\omega$  et de la masse volumique  $\rho$  du matériau du rotor.

7. Application numérique : Calculer  $\overline{\sigma}_s$  pour  $a = 10$  cm,  $\rho = 2800$  kg/m<sup>3</sup> et  $\omega = 12400$  tr / min.

8. Si la limite d'élasticité du matériau vaut 300 MPa, les contraintes apparaissant dans le rotor en rotation dépasseront-elles cette valeur ?

### III PROBLÈME DE THERMIQUE

Dans les deux exercices de thermique proposés ci-après, on fera les hypothèses qu'il n'y a pas de couplage avec la mécanique et que la diffusion se fait en conduction seule, sans convection ni radiation. On négligera les effets transitoires. On supposera enfin que le matériau est homogène et isotrope.

#### EXERCICE 1 DE THERMIQUE (4 POINTS)

On considère un problème de diffusion unidimensionnelle de la chaleur dans une barre soumise à une source interne de chaleur constante  $r$  égale à  $1000 \text{ W/m}^3$  (figure 2). La température est imposée aux deux extrémités de la barre, respectivement à  $20^\circ \text{ C}$  et  $50^\circ \text{ C}$ . La conductivité est  $k=10 \text{ W/(m }^\circ\text{C)}$ .

- 1) Ecrire l'équation de diffusion de la chaleur en l'adaptant au cas particulier considéré dans cet exercice.
- 2) Intégrer l'équation différentielle de la question 1).
- 3) Calculer les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites. En déduire la solution analytique du problème.
- 4) Une analyse éléments finis a été réalisée avec ANSYS, à l'aide de 10 éléments barre LINK32. Les résultats numériques sont présentés sur la figure 3 et dans le tableau 1. Comparer et commenter ces résultats numériques par rapport à la solution analytique de la question précédente.

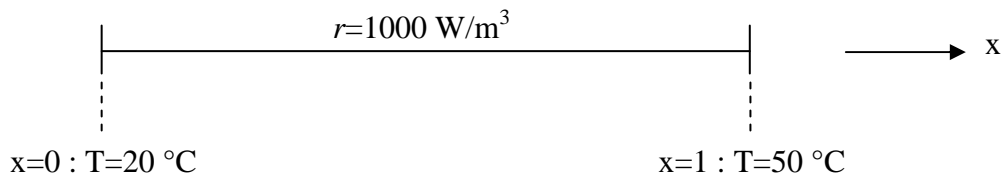


Figure 2

| x (m) | T (°C)<br>éléments finis | T (°C)<br>analytique |
|-------|--------------------------|----------------------|
| 0     | 20                       | 20                   |
| 0,1   | 27,5                     | 27,5                 |
| 0,2   | 34                       | 34                   |
| 0,3   | 39,5                     | 39,5                 |
| 0,4   | 44                       | 44                   |
| 0,5   | 47,5                     | 47,5                 |
| 0,6   | 50                       | 50                   |
| 0,7   | 51,5                     | 51,5                 |
| 0,8   | 52                       | 52                   |
| 0,9   | 51,5                     | 51,5                 |
| 1     | 50                       | 50                   |

Tableau 1

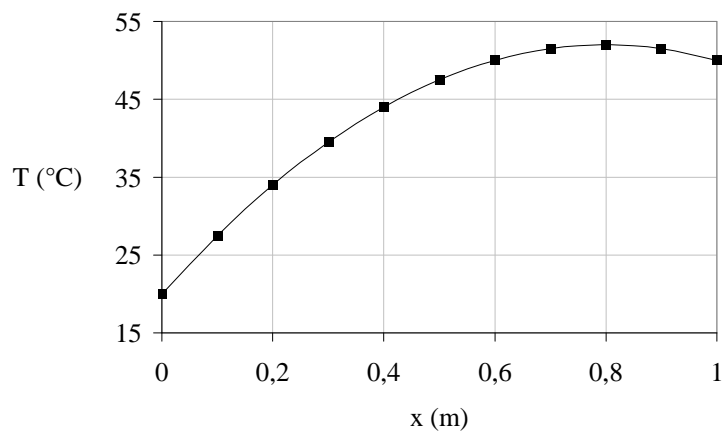


Figure 3

**EXERCICE 2 DE THERMIQUE (3 POINTS)**

On considère un problème de diffusion **bidimensionnelle** de la chaleur dans une structure plane qui est un carré de  $a$  mètre de côté. La structure est modélisée par un maillage comportant 2 éléments triangulaires et 4 nœuds (figure 4). La température est imposée sur les nœuds 2, 3 et 4. Les températures imposées sont notées respectivement :  $\bar{T}_2$ ,  $\bar{T}_3$  et  $\bar{T}_4$ . La conductivité est noté  $k$ . Il n'y a pas de source interne de chaleur.

- 1) En utilisant la convention de numérotation locale de la figure 5, assembler la matrice et le second membre du système linéaire associé au modèle élément fini. Résoudre ce système et exprimer les températures en fonction des données du problème.
- 2) Effectuer l'application numérique avec les valeurs suivantes :  $a=1$  m,  $k=10$  W/(m °C),  $\bar{T}_2=10$  °C,  $\bar{T}_3=40$  °C,  $\bar{T}_4=20$  °C.
- 3) Avec les données indiquées ci-dessous, des calculs éléments finis ont été réalisés avec un logiciel éléments finis. La température  $T_1$  obtenue pour chacun des cas considéré est la suivante :

- $a=1$  m,  $\bar{T}_2=30$  °C,  $\bar{T}_3=40$  °C,  $\bar{T}_4=20$  °C,  $k=10$  W/(m °C) :  $T_1=25$  °C
- $a=10$  m**,  $\bar{T}_2=30$  °C,  $\bar{T}_3=40$  °C,  $\bar{T}_4=20$  °C,  $k=10$  W/(m °C) :  $T_1=25$  °C
- $a=1$  m,  $\bar{T}_2=30$  °C,  **$\bar{T}_3=50$  °C**,  $\bar{T}_4=20$  °C,  $k=10$  W/(m °C) :  $T_1=25$  °C
- $a=1$  m,  $\bar{T}_2=30$  °C,  $\bar{T}_3=40$  °C,  $\bar{T}_4=20$  °C,  **$k=100$  W/(m °C)** :  $T_1=25$  °C

Expliquer et commenter ces résultats par rapport aux questions 1) et 2).

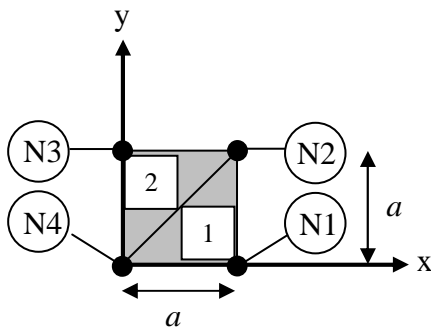


Figure 4 – maillage triangulaire

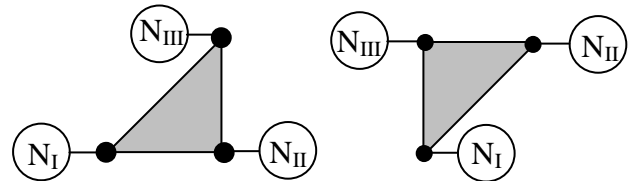


Figure 5 – convention de numérotation locale