

Durée de l'examen : 2 heures – Notes de Cours, de TD et de TP autorisées
Rendre sur une feuille séparée chacun des 2 problèmes

I PROBLÈME DE MÉCANIQUE DES STRUCTURES (8 POINTS)

Un élément câble élastique avec une force axiale interne P reste en contact avec un sol élastique. Le module d'élasticité du sol est b (force d'interaction entre le câble et le sol). L'équation différentielle gouvernant le problème est la suivante

$$P \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} - b u_y(x) = 0$$

où $u_y(x)$ est la déformé du câble. On applique deux forces F_1 et F_2 , orthogonales au sol, aux deux extrémités du câble (voir Fig.1).

Déterminer un système d'équations algébriques correspondant à cette équation différentielle pour un élément de longueur L , sous la forme suivante

$$(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

où \mathbf{u} contient deux ddl (u_y^1 et u_y^2 – déplacements orthogonaux au sol de deux nœuds de l'élément de câble).

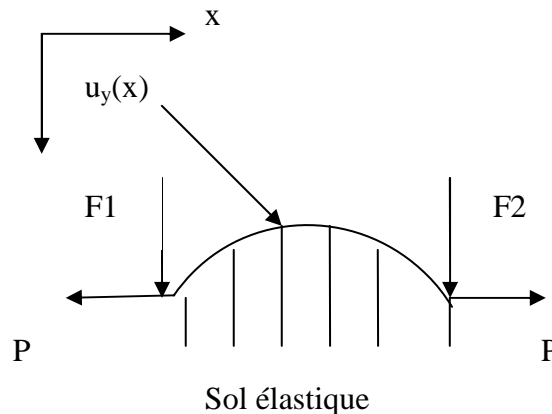


Fig. 1

II MODELISATION D'UN BRAS DE CENTRIFUGEUSE (12 POINTS)

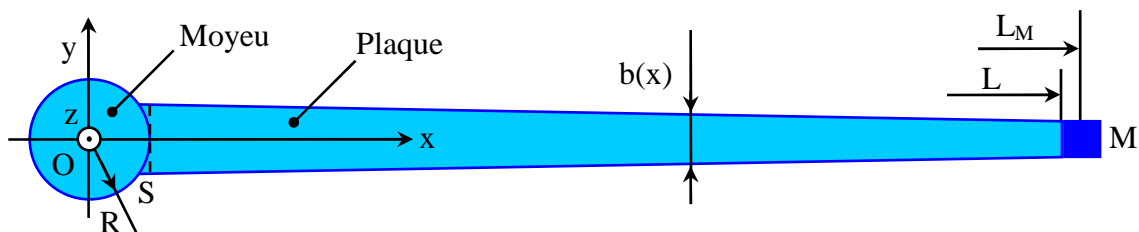


Fig. 2 : Bras tournant autour de l'axe Oz.

La Fig. 2 représente un dispositif qui permet de soumettre à d'importants efforts centrifuges une masse M fixée à l'extrémité d'un bras en rotation autour de son extrémité opposée.

Le centre de gravité de cette masse M est situé à la distance L_M de l'axe de rotation.

Le montage et la vitesse de rotation sont tels que le poids des pièces n'a pas besoin d'être pris en compte.

Le bras est constitué de 2 parties solidaires :

- une plaque élancée de largeur $b(x)$ variable en fonction de x , d'épaisseur e_p constante, dont l'interface avec la masse M est situé à la distance L de l'axe de rotation,
- un moyeu circulaire centré sur l'axe de rotation Oz , de rayon R et d'épaisseur e_m supérieure à e_p .

L'ensemble du bras (moyeu + plaque) est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ .

Un calcul bidimensionnel par éléments finis de cette pièce est envisagé, avec ANSYS, afin d'optimiser le profil $b(x)$ pour obtenir une contrainte uniforme dans la plaque.

1. Compte tenu de la symétrie de la structure et de son chargement, quelle est la zone minimale à mailler ? La définir clairement par un croquis.

2. Indiquer un élément approprié pour mailler cette structure, en précisant l'option à choisir.

3. Quelle est la condition aux limites qui permet de modéliser la symétrie de la pièce ? Préciser la commande ANSYS qui permet de l'imposer au modèle.

4. Cette condition est-elle suffisante pour que le calcul puisse s'effectuer ? Si non, quelle est la seconde condition aux limites à imposer.

5. La masse M ne fait pas partie du modèle, mais sa force centrifuge agit sur l'extrémité de la plaque. Comment cette force centrifuge peut-elle être imposée au modèle ? Donner la formule permettant de calculer numériquement le paramètre correspondant.

6. L'unité de longueur choisie pour définir la géométrie est le mm et l'unité de masse est la t ($1\text{ t} = 10^3\text{ kg}$). La masse volumique du matériau est définie en t/mm^3 et la vitesse de rotation en rd/s . Quelle sera alors l'unité des forces centrifuges calculées par ANSYS ?

7. Pour un calcul cohérent, quelle sera alors l'unité à considérer pour le module d'Young du matériau et pour d'éventuelles pressions à appliquer au modèle ?

Avant d'entreprendre la modélisation avec ANSYS, la tenue de la pièce est évaluée analytiquement.

En première approximation, la plaque est considérée comme un trapèze de hauteur $L - R$, et de bases $b(R)$ et $b(L)$.

8. Donner l'expression de la contrainte moyenne de traction $\overline{\sigma_S}$ qui apparaît dans la section de la plaque tangente au moyeu (section S de la figure), en fonction des dimensions de la pièce, de la vitesse de rotation ω , de la masse volumique ρ du matériau et de la masse M .

9. Calculer numériquement $\overline{\sigma_S}$ pour les données suivantes :

$$R = 500\text{ mm}$$

$$b(R) = 350\text{ mm}$$

$$M = 1\text{ t}$$

$$L = 5000\text{ mm}$$

$$b(L) = 240\text{ mm}$$

$$\rho = 7,85 \cdot 10^{-9}\text{ t/mm}^3$$

$$L_M = 5200\text{ mm}$$

$$e_p = 100\text{ mm}$$

$$\omega = 200\text{ tr/min}$$

10) Les règles de conception de ce type d'appareil imposent que la contrainte équivalente de Von Mises doit rester, en tout point du bras, inférieure ou égale à 100 MPa. Avec les données numériques de la question précédente, cette limite sera-t-elle respectée ?