N.B. : **Durée de l'examen : 2 heures ; Notes de cours, de TD et de TP autorisées**
Chaque problème est à rendre sur une feuille séparée

MODÉLISATION D'UN ARBRE ÉPAULÉ EN TRACTION (9 points)

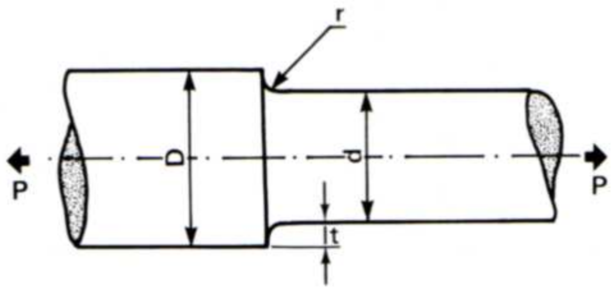


Fig. 1 : Arbre épaulé en traction.

La Fig. 1 représente un arbre épaulé, de section circulaire, soumis à un effort de traction P.
Ses deux extrémités (non représentées sur la Fig. 1) sont constituées de sections circulaires planes et perpendiculaires à l'axe de révolution.
La longueur totale de l'arbre est de 10 d et l'épaulement est situé en son milieu, à 5 d de chacune des extrémités.
Le matériau qui le constitue est homogène et isotrope.

Un calcul par éléments finis est envisagé, avec le logiciel ANSYS, dans le but de connaître le champ des contraintes qui apparaissent en tout point de l'arbre.

1. Compte tenu de la symétrie de la structure et de son chargement, un calcul bidimensionnel est-il possible ? Si non, pourquoi ? Si oui, comment ?
2. Quelle est la structure minimale à mailler ? La définir clairement par un croquis.
3. Indiquer un élément approprié pour ce maillage, en précisant l'option à choisir.
4. Quelle sont les conditions aux limites à imposer ? Préciser les commandes ANSYS à utiliser.
5. Dans un repère cylindrique basé sur l'axe de révolution de l'arbre, le déplacement $\vec{U}$ d'un nœud a pour composantes U_r, U_θ et U_z. Quelle sera la valeur de la composante U_θ pour les nœuds de la surface latérale de l'arbre ?
6. En prévision d'un calcul ultérieur, où l'arbre tournera autour de son axe, la masse volumique du matériau doit être introduite dans les données d'ANSYS. La densité du matériau est de 5. Dans le menu "Material Models", quelle valeur faut-il écrire pour le paramètre "Density" ? Pourquoi ?

Avant d'entreprendre la modélisation avec ANSYS, la tenue de l'arbre, soumis uniquement à l'effort P (Fig. 1), est évaluée analytiquement.

7. Donner l'expression, en fonction des données du problème, de la contrainte équivalente de Von Mises $\sigma_{éq}^{VM}$ dans une section de l'arbre de diamètre d, éloignée de l'épaulement et de l'extrémité où est appliqué l'effort P.

Rappel : $\sigma_{éq}^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]}$

où σ_1, σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales au point considéré.

8. Application numérique : calculer $\sigma_{éq}^{VM}$ pour P = 3 kN et d = 8 mm.
9. La limite d'élasticité du matériau constituant l'arbre est de 60 MPa. Cette limite sera-t-elle atteinte dans l'arbre ? Pourquoi ?

MODÉLISATION DU CONTACT (<u>3 points</u>)

On cherche à modéliser l'écrasement d'une surface rugueuse par un cylindre rigide (Figure 2).

- Cylindre rigide
- Surface rugueuse : loi élastoplastique parfaire E=210000MA, ν = 0.3 et limite élastique=500MPa

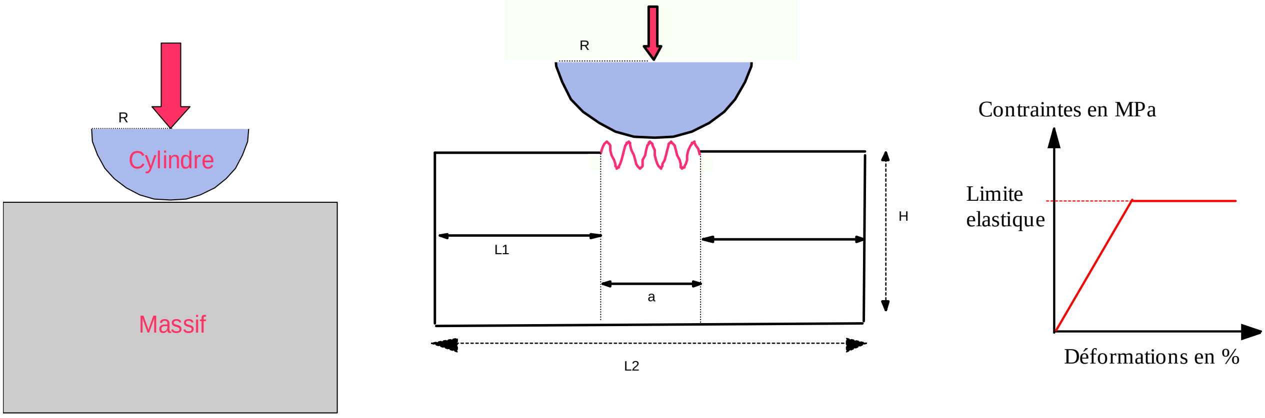


Figure 2: surface rugueuse et indentation

Nous modélisons ce problème via la MEF. Nous nous sommes placés dans le cadre des déformations planes. La surface rugueuse est donc écrasée par le cylindre auquel on impose un déplacement vertical δ.

1. Quelles précautions particulières prenez-vous pour la création de votre maillage ?
2. Votre calcul EF a convergé mais après une analyse rapide de vos résultats, vous constatez qu'il y a des interpénétrations inacceptables.
    a. Quelles peuvent être les origines de ces soucis ?
    b. Que tentez-vous de faire pour remédier à ce problème ?
3. Le calcul est maintenant validé. On observe, sur la surface rugueuse, les pressions de contact (Figure 3) et la contrainte de Von Mises (Figure 4).
    a. Est-ce que leur distribution vous parait cohérente ? Justifier.
    b. On note une contraint de Von Mises Max de 670Mpa. Où localiseriez-vous cette contrainte max ? Que vous inspire cette valeur ?

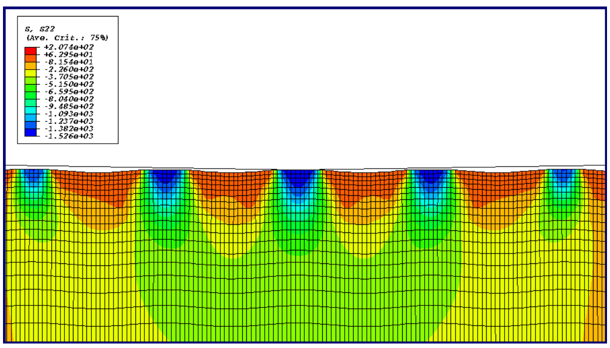


Figure 3: Pression de contact (MPa)

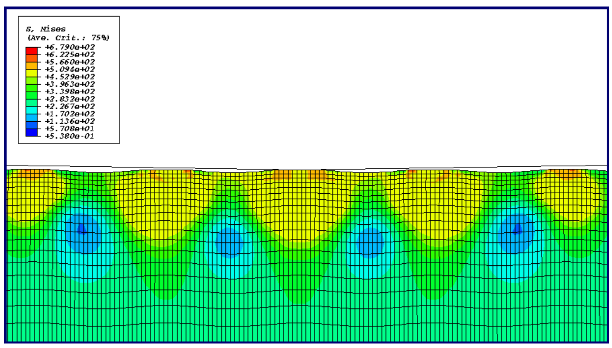


Figure 4: Contrainte de Von Mises (MPa)

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES PROCÉDÉS DE MISE EN FORME (<u>3 points</u>)

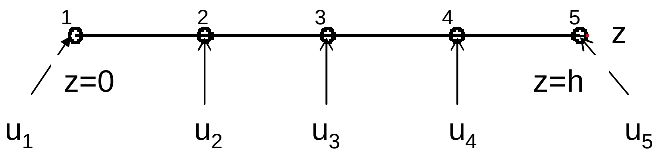
A) Donnez les quatre étapes d'une boucle de modélisation. Quelles sont les sources d'erreurs associées ?

B) Ecoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles pour une loi de comportement newtonienne.

On suppose un écoulement entre plaques parallèles de longueur L et de largeur W dans le cas ou la viscosité est newtonienne. La pression est P1 à l'entrée et P2 à la sortie. L'équation d'équilibre avec une loi de comportement Newtonienne est régie par : $-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

- Avec u(z=0)=0 ; et u(z=h)=0 ;

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation $-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ en utilisant la méthode des différences finies 1D avec un maillage de 5 nœuds. Donner l'expression de la matrice de rigidité globale [K] et du vecteur du second membre global {F}.



La discrétisation des termes de dérivées est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d^2u}{dz^2}\approx\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta z^2}$$

PROBLÈME DE THERMIQUE (5 POINTS)

On considère un problème de conduction de chaleur **monodimensionnelle** (1 D) dans une barre de 1 m de long (figure 5). On fera les hypothèses qu'il n'y a pas de couplage avec la mécanique ; qu'il n'y a ni convection ni radiation ; que le matériau est homogène et isotrope et **qu'il n'y a pas de source interne de chaleur en W/m^3**. Les effets transitoires ne seront pas pris en compte. La température sera notée T et le flux ϕ. Dans les questions 1) et 2) on prendra une conductivité *k* égale à 10 W/(m °C).

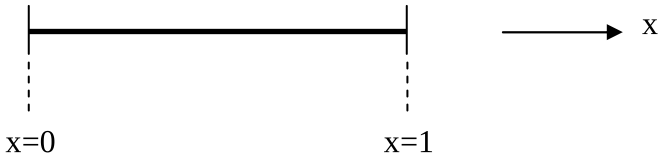


Figure 5

1) Ecrire l'équation différentielle de diffusion de la chaleur. Intégrer **analytiquement** cette équation.

2) Calculer l'expression générale de T(x) à l'aide de la question 1) dans les différents cas de conditions aux limites qui suivent :

   Cas 1 : T(x=0)=0°C ; T(x=1)=5°C

   Cas 2 : T(x=0)=0°C ; ϕ(x=1)=10 W/m^2

   Cas 3 : ϕ(x=0)=10 W/m^2 ; T(x=1)=5°C

3) On se place dans cette question sous les mêmes hypothèses que la question 1) mais avec deux barres de 1 m de long chacune (figure 6). La température est imposée aux deux extrémités de la barre : T(x=0)=0°C; T(x=2)=5°C. Chaque barre a une conductivité et une section différente : k_1=10 W/(m°C); k_2=30 W/(m°C); S_1=2 m^2; S_2=6 m^2. Calculer l'expression générale de T(x).

   Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1) sur chaque barre, les conditions aux limites en température ainsi que des conditions de continuité en x=1 (continuité de la température et de la puissance en W : puissance=flux × section).

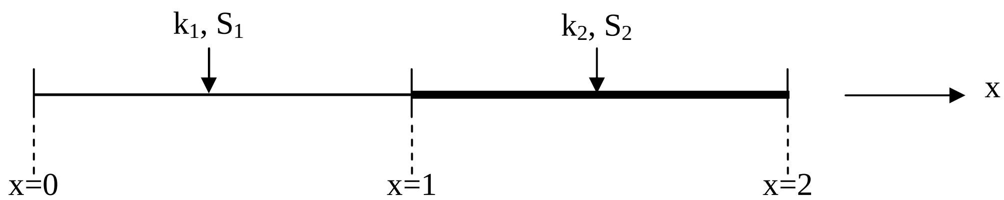


Figure 6

4) Comparer les résultats des questions 2) et 3) avec les résultats numériques contenus dans le tableau 1. Ces résultats ont été relevés au milieu de la structure. Les calculs éléments finis ont été réalisés avec ANSYS en utilisant l'élément barre LINK32.

Question 2) – Cas 1	Question 2) – Cas 2	Question 2) – Cas 3	Question 3)
T(x=0.5)=2.5	T(x=0.5)=0.5	T(x=0.5)=5.5	T(x=1)=4.5

Tableau 1