

$$1) k \Delta T + \bar{q} = 0$$

CONDUCTION

(1)

$$\text{en 1D: } k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \bar{q} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\bar{q}}{k} = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} x + \bar{q}_0 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{x^2}{2} + \bar{q}_0 x \right\} + c \quad (a)$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{x^3}{6} + \bar{q}_0 \frac{x^2}{2} \right\} + cx + d \quad (b)$$

$$2) T(0) = T_0 \Rightarrow \boxed{d = T_0} \quad (c)$$

$$T(L) = T_L \Rightarrow -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{L^3}{6} + \bar{q}_0 \frac{L^2}{2} \right\} + cL + T_0 = T_L$$

$$\Rightarrow c = \frac{T_L - T_0}{L} + \frac{L}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{6} + \frac{\bar{q}_0}{2} \right\}$$

$$\frac{2\bar{q}_L - \bar{q}_0 + 3\bar{q}_0}{6} = \frac{\bar{q}_L + 2\bar{q}_0}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{T_L - T_0}{L} + \frac{L}{6k} (\bar{q}_L + 2\bar{q}_0)} \quad (d)$$

(b), (c) et (d) $\Rightarrow$:

$$T(x) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{Lx}{6} (\bar{q}_L + 2\bar{q}_0) + \frac{\bar{q}_0 - \bar{q}_L}{L} \frac{x^3}{6} - \bar{q}_0 \frac{x^2}{2} \right\} + \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (e)$$

On en déduit que:

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{L^2}{12} (\bar{q}_L + 2\bar{q}_0) + \frac{\bar{q}_0 - \bar{q}_L}{48} L^2 - \frac{\bar{q}_0}{8} L^2 \right\} + \frac{T_L - T_0}{2} + T_0$$

$$= \frac{L^2}{48k} \{ 4\bar{q}_L + 8\bar{q}_0 + \bar{q}_0 - \bar{q}_L - 6\bar{q}_0 \} + \frac{T_0 + T_L}{2}$$

$$= \frac{L^2}{48k} \{ 3\bar{q}_L + 3\bar{q}_0 \} + \frac{T_0 + T_L}{2} = \frac{L^2}{16k} \{ \bar{q}_0 + \bar{q}_L \} + \frac{T_0 + T_L}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} \left\{ T_0 + T_L + \frac{L^2}{8k} (\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \right\}} \quad (f)$$

3) (a), (b) et (c) $\Rightarrow$:

(2)

$$T(0) = d = T_0 \Rightarrow d = T_0 : \text{idem (c)}$$

$$k \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{x^2}{2} = \bar{q}_0 x + ck$$

$$\Rightarrow k \frac{\Delta T}{\Delta x}(L) = \bar{q}_0 \frac{L^2}{2L} - \bar{q}_0 L + ck = \phi_L$$

$$\Rightarrow ck = \phi_L - \underbrace{\frac{\bar{q}_0 - \bar{q}_L}{2} L + \bar{q}_0 L}_{\parallel}$$

$$\frac{2\bar{q}_0 - \bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} L = \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} L$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{k} \left\{ \phi_L + \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} L \right\}} \quad (g)$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{x^3}{6} + \bar{q}_0 \frac{x^2}{2} + \left[\phi_L + \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} L \right] x \right\} + T_0$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{L^3}{48} + \bar{q}_0 \frac{L^2}{8} - \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{4} L^2 \right\} + T_0 + \phi_L \frac{L}{2k}$$

$$\parallel \quad L^2 \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0 + 6\bar{q}_0 - 12\bar{q}_0 - 12\bar{q}_L}{48} = -\frac{11\bar{q}_L + 7\bar{q}_0}{48} L^2$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{k} \frac{11\bar{q}_L + 7\bar{q}_0}{48} L^2 + T_0 + \phi_L \frac{L}{2k}$$

$$= \boxed{\frac{L}{2k} \left\{ \frac{11\bar{q}_L + 7\bar{q}_0}{24} L + \phi_L \right\} + T_0} \quad (h)$$

$$\cdot T(L) = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \frac{L^3}{6} + \bar{q}_0 \frac{L^2}{2} - \left[\phi_L + \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} L \right] L \right\} + T_0$$

$$= -\frac{1}{k} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{6} + \frac{\bar{q}_0}{2} - \frac{\bar{q}_0 + \bar{q}_L}{2} \right\} L^2 + T_0 + \frac{\phi_L L}{k}$$

$$= \frac{2\bar{q}_L + \bar{q}_0}{6k} L^2 + T_0 + \frac{\phi_L L}{k} = \boxed{\frac{L}{2k} \left\{ \frac{\bar{q}_0 + 2\bar{q}_L}{3} L + 2\phi_L \right\} + T_0} \quad (i)$$

4) Première démonstration (valable mais pas très rigoureuse):

(3)

On a vu en TD que, en 2D :

$$\iint_{\Omega} k \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} dx dy = \iint_{\Omega} \bar{q} \varphi dx dy + \int_{\partial \Omega} \phi \varphi \quad \forall \varphi$$

Par analogie, les différents termes se transformant de la manière suivante en 1D :

$$\bullet \iint_{\Omega} k \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} dx dy \rightarrow \int_0^L k \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

$$\bullet \iint_{\Omega} \bar{q} \varphi dx dy \rightarrow \int_0^L \bar{q} \varphi dx$$

$$\bullet \int_{\partial \Omega} \phi \varphi \rightarrow \phi(0) \varphi(0) + \phi(L) \varphi(L)$$

↑
{ somme sur les extrémités
de x

↑
{ somme sur les
extrémités de
[0, L]

4) Densité de démonstration (plus rigoureuse)

(4)

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right] + \bar{q} = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} \left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]}_{\parallel} y \, dn + \int_0^L \bar{q} y = 0 \quad \forall y$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[k \frac{\partial T}{\partial n} y \right] - k \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\Leftrightarrow \left[k \frac{\partial T}{\partial n} y \right]_0^L - \int_0^L k \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n} \, dn + \int_0^L \bar{q} y = 0 \quad \forall y$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L k \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n} \, dn = \int_0^L \bar{q} y \, dn + \underbrace{k \frac{\partial T}{\partial n}(L)}_{\parallel} y(L) - \underbrace{k \frac{\partial T}{\partial n}(0)}_{\parallel} y(0) \quad \forall y$$

$\uparrow$ $-q_2(L)$ $\uparrow$ $-q_2(0)$
 $\uparrow$ Load de Fourier

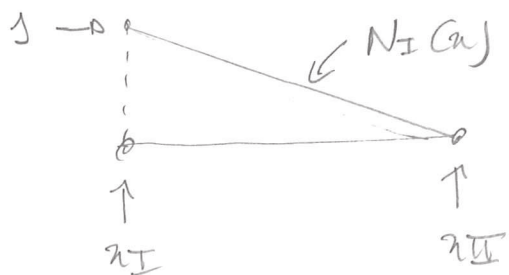
Par ailleurs :

$$\phi_L = - \langle q_2(L), \underbrace{n(L)}_{=+1} \rangle = -q_2(L)$$

$$\phi_0 = - \langle q_2(0), \underbrace{n(0)}_{=-1} \rangle = q_2(0)$$

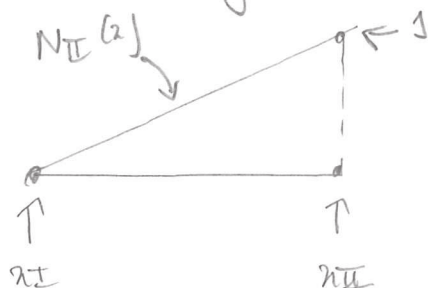
D'où le résultat.

5) N_I doit vérifier :



$$\Rightarrow N_I(\alpha) = \frac{\lambda_{II} - \alpha}{\lambda_{II} - \lambda_I}$$

N_{II} doit vérifier :



$$\Rightarrow N_{II}(\alpha) = \frac{\alpha - \lambda_I}{\lambda_{II} - \lambda_I}$$

6) k_c a strictement la même structure que celle vue en TD en 2D, sauf qu'on a deux fonctions de forme au lieu de 3 et une seule variable d'intégration au lieu de deux. Donc :

$$k_c = \int_{\lambda_I}^{\lambda_{II}} k \begin{Bmatrix} N_I, \alpha \\ N_{II}, \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_I, \alpha & N_{II}, \alpha \end{Bmatrix} d\alpha$$

$$= k \underbrace{\begin{Bmatrix} N_I, \alpha \\ N_{II}, \alpha \end{Bmatrix}}_{\text{car } \mathbf{f}_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} N_I, \alpha & N_{II}, \alpha \end{Bmatrix}}_{\text{II}} \underbrace{\left(\int_{\lambda_I}^{\lambda_{II}} d\alpha \right)}_{\text{N}} \underbrace{\quad}_{\lambda_{II} - \lambda_I}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_{II} - \lambda_I} \right)^2 \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k_c = \frac{k}{\lambda_{II} - \lambda_I} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{CAFD}$$

$$7) \underline{k}_1 = \frac{k}{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{matrix} \quad \textcircled{6}$$

$\begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{matrix}$

$\hat{m}$ longueur d'intervalle - $\hat{m}$ conductivité.

$$\Rightarrow \underline{k} = \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 1 & -1 & \\ -1 & 1+1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

8) D'après le cours et le TD :

$$\underline{b_c} = \iint_{T_c} \bar{q} \begin{Bmatrix} N_I \\ N_{II} \\ N_{III} \end{Bmatrix} dx dy : \text{ en 2D}$$

$$\Rightarrow \underline{b_c} = \int_{x_I}^{x_{II}} \bar{q} \begin{Bmatrix} N_I \\ N_{II} \end{Bmatrix} dx : \text{ en 1D}$$

⚠ % cours et TD : ici $\bar{q}$ dépend de x

$$\Rightarrow \underline{b_c} = \int_{x_I}^{x_{II}} \left\{ \frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} x + \bar{q}_0 \right\} \begin{Bmatrix} \frac{x_{II} - x}{x_{II} - x_I} \\ \frac{x - x_I}{x_{II} - x_I} \end{Bmatrix} dx$$

Eq. 1 et Q5)

$$\Rightarrow \underline{b_c} = \frac{1}{x_{II} - x_I} \left[\frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{L} \underbrace{\int_{x_I}^{x_{II}} \begin{Bmatrix} (x_{II} - x)x \\ (x - x_I)x \end{Bmatrix} dx}_{\textcircled{I}} + \bar{q}_0 \underbrace{\int_{x_I}^{x_{II}} \begin{Bmatrix} x_{II} - x \\ x - x_I \end{Bmatrix} dx}_{\textcircled{J}} \right]$$

(j)

Calcul de I :

$$\begin{aligned} \int_{x_I}^{x_{II}} (x_{II} - x)x dx &= x_{II} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_I}^{x_{II}} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_I}^{x_{II}} = \frac{x_{II}}{2} (x_{II}^2 - x_I^2) - \frac{1}{3} (x_{II}^3 - x_I^3) \\ &= \frac{x_{II}}{2} (x_{II} - x_I)(x_{II} + x_I) - \frac{1}{3} (x_{II} - x_I)(x_I^2 + x_{II}^2 + x_I x_{II}) \\ &= (x_{II} - x_I) \left\{ x_{II} \frac{x_I + x_{II}}{2} - \frac{1}{3} (x_I^2 + x_{II}^2 + x_I x_{II}) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n_{II} - n_I)}{6} \left\{ 3n_{II}^2 + 3n_I n_{II} - 2n_I^2 - 2n_{II}^2 - 2n_I n_{II} \right\}$$

(7)

$$\parallel$$

$$n_{II}^2 - 2n_I^2 + n_I n_{II}$$

$$\parallel$$

$$n_{II}^2 - n_I^2 - n_I^2 + n_I n_{II}$$

$$\parallel$$

$$(n_{II} - n_I)(n_I + n_{II}) + n_I(n_{II} - n_I)$$

$$\parallel$$

$$(n_{II} - n_I)(2n_I + n_{II})$$

$$\Rightarrow \int_{n_I}^{n_{II}} (n_{II} - n) n \, dn = - \frac{(n_{II} - n_I)^2}{6} (2n_I + n_{II})$$

Il suffit de permuter n_I et n_{II} dans a résultat pour obtenir :

$$\int_{n_{II}}^{n_I} (n - n_{II}) n \, dn = \frac{(n_{II} - n_I)^2}{6} (n_I + 2n_{II})$$

$$\text{D'où : } I = \frac{(n_{II} - n_I)^2}{6} \left\{ \begin{matrix} 2n_I + n_{II} \\ n_I + 2n_{II} \end{matrix} \right\} \quad (k)$$

Calcul de J

$$\int_{n_I}^{n_{II}} (n_{II} - n) \, dn = \left[-\frac{(n_{II} - n)^2}{2} \right]_{n_I}^{n_{II}} = \frac{(n_{II} - n_I)^2}{2}$$

En permutant le rôle de n_I et n_{II} :

$$\int_{n_{II}}^{n_I} (n - n_{II}) \, dn = \frac{(n_{II} - n_I)^2}{2}$$

$$\text{D'où : } J = \frac{(n_{II} - n_I)^2}{2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \quad (l)$$

On reporte (k) et (l) dans (j) :

$$b_c = \frac{n_{II} - n_I}{2} \left[\frac{q_L - q_0}{3L} \left\{ \begin{matrix} 2n_I + n_{II} \\ n_I + 2n_{II} \end{matrix} \right\} + q_0 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right]$$

g) $\boxed{e_1}$: $\lambda_I = 0$; $\lambda_{II} = \frac{L}{2}$

(8)

$$\underline{b}_1 = \frac{L}{4} \left[\frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{3L} \begin{Bmatrix} L/2 \\ L \end{Bmatrix} + \bar{q}_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \frac{L}{4} \left[\frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \bar{q}_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L - \bar{q}_0 + 6\bar{q}_0 \\ 2\bar{q}_L - 2\bar{q}_0 + 6\bar{q}_0 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L + 5\bar{q}_0 \\ 2\bar{q}_L + 4\bar{q}_0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$\boxed{e_2}$: $\lambda_I = \frac{L}{2}$; $\lambda_{II} = L$

$$\underline{b}_2 = \frac{L}{4} \left[\frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{3L} \begin{Bmatrix} 2L \\ 5L/2 \end{Bmatrix} + \bar{q}_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \frac{L}{4} \left[\frac{\bar{q}_L - \bar{q}_0}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} + \bar{q}_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} 4\bar{q}_L - 4\bar{q}_0 + 6\bar{q}_0 \\ 5\bar{q}_L - 5\bar{q}_0 + 6\bar{q}_0 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} 4\bar{q}_L + 2\bar{q}_0 \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\underline{b} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L + 5\bar{q}_0 \\ 2\bar{q}_L + 4\bar{q}_0 + 4\bar{q}_L + 2\bar{q}_0 \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L + 5\bar{q}_0 \\ 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix}$$

$$10) \quad \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L + 5\bar{q}_0 \\ 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\Rightarrow [-1 \quad 2 \quad -1] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{L^2}{48k} 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) = \frac{L^2}{8k} (\bar{q}_0 + \bar{q}_L)$$

$$\Rightarrow 2T_2 = \frac{L^2}{8k} (\bar{q}_0 + \bar{q}_L) + T_1 + T_3$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{L^2}{8k} (\bar{q}_0 + \bar{q}_L) + T_0 + T_L \right\}$$

Rq: on obtient strictement le m^{ême} résultat qu'à la question 2).

$$11) \quad \varphi(x) \cong \sum_{i=1}^n \varphi_i N_i(x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 coordonnées $\uparrow$ fonctions de forme
 nodales de φ

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(\omega) = \varphi_1 N_1(\omega) + \dots + \varphi_n N_n(\omega) \\ \varphi(L) = \varphi_1 N_1(L) + \dots + \varphi_n N_n(L) \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} N_1(\omega) = 1 ; N_2(\omega) = \dots = N_n(\omega) = 0 \\ N_1(L) = \dots = N_{n-1}(L) = 0 ; N_n(L) = 1 \end{cases}$$

par construction des fonctions de forme

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \varphi_1 ; \varphi(L) = \varphi_n$$

$$\Rightarrow \phi_L \varphi(L) + \phi_\omega \varphi(\omega) = \phi_L \varphi_n + \phi_\omega \varphi_1 :$$

$$= \underbrace{\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_n\}}_{\varphi^T} \begin{Bmatrix} \phi_\omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_L \end{Bmatrix}$$

12) On déduit de 11) et du TD que :

$$\underline{C} = \begin{Bmatrix} \phi_\omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_L \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$
notation

(pour se débarrasser de φ^T)

$$13) \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24} \begin{Bmatrix} \bar{q}_L + 5\bar{q}_0 \\ 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ 0 \\ \phi_L \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{L^2}{48k} \begin{Bmatrix} 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} + \frac{L}{2k} \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_L \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{L^2}{48k} \begin{Bmatrix} 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} + \frac{L\phi_L}{2k} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{L^2}{48k} \begin{Bmatrix} 6(\bar{q}_0 + \bar{q}_L) \\ 5\bar{q}_L + \bar{q}_0 \end{Bmatrix} + \frac{L\phi_L}{2k} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + T_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \frac{L^2}{48k} \begin{Bmatrix} 7\bar{q}_0 + 11\bar{q}_L \\ 8\bar{q}_0 + 16\bar{q}_L \end{Bmatrix} + \frac{L\phi_L}{2k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + T_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{L^2}{48k} (7\bar{q}_0 + 11\bar{q}_L) + \frac{L\phi_L}{2k} + T_0$$

$$= \frac{L}{2k} \left\{ \frac{L}{24} (7\bar{q}_0 + 11\bar{q}_L) + \phi_L \right\} + T_0$$

On retrouve exactement la même expression que dans la Q3).

Par ailleurs :

$$T_3 = \frac{L^2}{48k} (8\bar{q}_0 + 16\bar{q}_L) + \frac{L\phi_L}{k} + T_0$$

$$= \frac{L^2}{6k} (\bar{q}_0 + 2\bar{q}_L) + \frac{L\phi_L}{k} + T_0$$

$$= \frac{L}{2k} \left\{ \frac{L}{3} (\bar{q}_0 + 2\bar{q}_L) + 2\phi_L \right\} + T_0$$

On retrouve exactement la même expression que dans la Q3).

14) Les expressions des questions 2), 3), 10) et 13) sont identiques. Si on les utilise avec des données numériques de l'énoncé, on obtient:

• C.L. de la Q2):

$$T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{L^2}{8k} (q_0 + q_L) + T_0 + T_L \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4000}{80} + 5 \right\} = \frac{55}{2} = 27.5$$

" 50

On trouve exactement la même valeur que celle d'ANSYS

• C.L. de la Q3):

$$T_2 = \frac{L}{2k} \left\{ \frac{L}{24} (7q_0 + 11q_L) + \phi_L \right\} + \frac{T_0}{1} = \frac{5000}{20 \times 3} + \frac{100}{20} \approx 88.333$$

" 1/20 40000/24 100 0 250/3 5

" 5000/3 88.333

$$T_3 = \frac{L}{2k} \left\{ \frac{L}{3} (q_0 + 2q_L) + 2\phi_L \right\} + \frac{T_0}{1} = \frac{7000}{60} + \frac{200}{20} \approx 126.67$$

" 1/20 7000/3 200 0 700/6 10

126.67 ≈ 700/6

On retrouve exactement la même valeur que celle d'ANSYS

Q1) { $\boxed{1}$ ligne droite $\Rightarrow F_{11} = 0$
 de $\vec{u}$: $F_{22} = F_{33} = 0$

{ • Triangle équilatéral $\Rightarrow$ longueur de $\boxed{1}$ = longueur de $\boxed{2}$
 D'après la formule de réciprocité sur les facteurs de forme : $\underbrace{A_1}_{L_0} F_{12} = \underbrace{A_2}_{L_0} F_{21} \Rightarrow F_{12} = F_{21}$
 de $\vec{u}$: $F_{13} = F_{31}$; $F_{23} = F_{32}$

{ • Propriété sur les facteurs de forme :

$$\underbrace{F_{11}}_{=0} + \underbrace{F_{12} + F_{13}}_{\downarrow} = 1 \Rightarrow F_{12} = F_{13} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{12} = F_{13} \text{ pour des raisons évidentes} \\ \text{de symétrie} \end{array} \right.$$

 Idem pour F_{21} , F_{23} , F_{31} et F_{32}

{ • Conclusion :
 $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$
 $F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = \frac{1}{2}$

Q2)

$\boxed{1}$	$\boxed{5}$
$\boxed{800}$	$\boxed{600}$
$\boxed{700}$	$\boxed{600}$
$\boxed{800}$	$\boxed{10}$
$\boxed{100}$	$\boxed{800}$

Q3) D]

Q4) A]

Q5) C]

Q6) D]