Durée de l'examen : 2 heures

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées.

L'usage de moyens électroniques (ordinateur, téléphone, calculatrice, traducteur automatique etc.) est interdit.

L'ensemble des questions représente un total de 26 points (20 points en conduction et 6 points en rayonnement). Le médian sera noté sur 20, sans appliquer de règle de 3.

Les calculs devront être argumentés et justifiés. Tout résultat donné sans justification ne sera pas noté.

THERMIQUE – CONDUCTION (20 POINTS)

On considère un problème monodimensionnel (1 D) de conduction de chaleur au sein d'une barre de longueur *L* (figure 1). Cette barre est constituée d'un matériau homogène isotrope de conductivité *k*. On considèrera que cette barre est soumise à une source interne de chaleur $\bar{q}(x)$ (W/m^3) répartie linéairement, comme indiqué sur la figure 1. La source interne de chaleur satisfait donc l'équation (1) :

$$\bar{q}(x) = \frac{\overline{q_L} - \overline{q_0}}{L} x + \overline{q_0} \qquad (1)$$

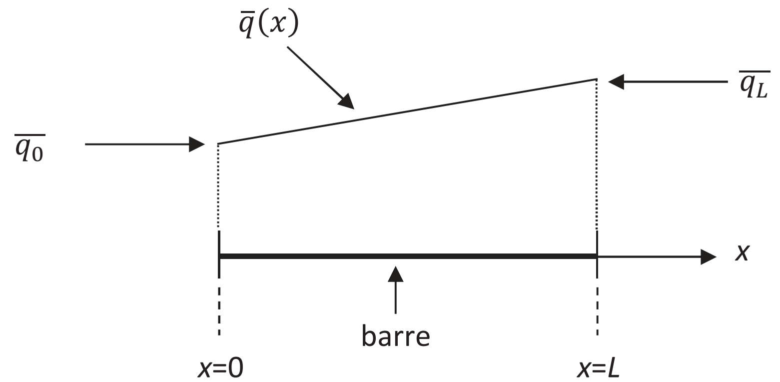

Figure 1 – Problème à étudier

1) **(1.5 point)** Ecrire l'équation différentielle d'ordre 2 qui pilote la diffusion de la chaleur. Résoudre analytiquement cette équation, c'est-à-dire à la main, de manière exacte, sans approximation de type éléments finis. La température solution *T(x)* sera exprimée en fonction de *x*, *k*, *L*, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$ ainsi que de deux constantes d'intégration que l'on notera *c* et *d*.

2) **(1.5 point)** On impose les conditions aux limites suivantes aux extrémités de la structure :

$$T(0)=T_0 \;;\; T(L)=T_L \qquad (2)$$

Calculer les constantes d'intégration *c* et *d* en fonction de T_0, T_L, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$, *k et L.*

Exprimer *T* en fonction de T_0, T_L, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$, *k, L* et *x.*

En déduire que :
$$T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{T_0 + T_L + \frac{L^2}{8k}(\overline{q_0} + \overline{q_L})\right\} \qquad (3)$$

3) **(1.5 point)** On impose les conditions aux limites suivantes aux extrémités de la structure :

$$T(0)=T_0 \;;\; k\frac{\partial T}{\partial x}(L) = \phi_L \qquad (4)$$

Où ϕ_L représente un flux imposé en W/m^2.

Calculer les constantes d'intégration *c* et *d* en fonction de T_0, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$, ϕ_L, *k* et *L*.

Calculer *T* en fonction de T_0, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$, ϕ_L, *k*, *L* et *x*.

En déduire que :

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2k}\left\{\frac{L}{24}(7\overline{q_0} + 11\overline{q_L}) + \phi_L\right\} + T_0 \; ; T(L) = \frac{L}{2k}\left\{\frac{L}{3}(\overline{q_0} + 2\overline{q_L}) + 2\phi_L\right\} + T_0 \tag{5}$$

4) (0.75 point) On souhaite désormais traiter le problème par la méthode des éléments finis en utilisant des éléments P_1 (approximation linéaire). En repartant de l'équation différentielle d'ordre 2 qui pilote la diffusion de la chaleur, montrer que :

$$\int_0^L k\frac{\partial T(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}dx = \int_0^L \overline{q}\,(x)\varphi(x)dx + \phi_L\varphi(L) + \phi_0\varphi(0) \quad \forall\varphi \tag{6}$$

où φ est une fonction test et ϕ_0 et ϕ_L sont les flux (W/m²) aux bornes du domaine d'étude.

5) (1 point) Calculer les deux fonctions de forme $N_{\mathrm{I}}(x)$ et $N_{\mathrm{II}}(x)$ associées aux deux nœuds de l'élément e de la Figure 2.

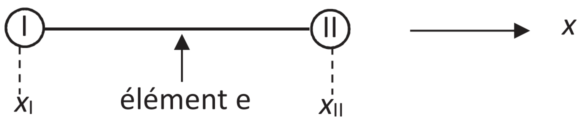

Figure 2 – élément d'un maillage

6) (1 point) Montrer que la matrice de conductivité élémentaire associée à l'élément e est donnée par :

$$\underline{\underline{k}}_e = \frac{k}{x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

7) (2 points) Calculer les deux matrices de conductivité élémentaires ainsi que la matrice de conductivité assemblée dans le cas du maillage de la Figure 3, maillage qui comporte 3 nœuds (les numéros des nœuds sont donnés dans les cercles) et deux éléments (les numéros des éléments sont donnés dans les carrés). On donnera les résultats en fonction de *k* et *L*.

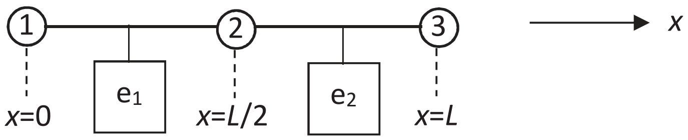

Figure 3 – Maillage

8) (3 points) Montrer que le second membre élémentaire associé à l'élément e de la figure 2, et provenant de la source interne de chaleur $\overline{q}(x)$ contenu dans l'équation (6), est donné par :

$$\underline{b}_e = \frac{x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}}}{2}\left[\frac{\overline{q_L} - \overline{q_0}}{3L}\begin{Bmatrix} 2x_{\mathrm{I}} + x_{\mathrm{II}} \\ x_{\mathrm{I}} + 2x_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} + \overline{q_0}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] \tag{8}$$

Pour établir l'équation (8), on pourra se servir, si besoin et sans les démontrer, des deux factorisations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{x_{\mathrm{II}}}{2}(x_{\mathrm{II}}^2 - x_{\mathrm{I}}^2) - \frac{1}{3}(x_{\mathrm{II}}^3 - x_{\mathrm{I}}^3) = \frac{(x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}})^2}{6}(2x_{\mathrm{I}} + x_{\mathrm{II}}) \\ \frac{x_{\mathrm{I}}}{2}(x_{\mathrm{I}}^2 - x_{\mathrm{II}}^2) + \frac{1}{3}(x_{\mathrm{II}}^3 - x_{\mathrm{I}}^3) = \frac{(x_{\mathrm{II}} - x_{\mathrm{I}})^2}{6}(x_{\mathrm{I}} + 2x_{\mathrm{II}}) \end{cases} \tag{9}$$

9) **(2 points)** Calculer les deux seconds membres élémentaires, ainsi que le second membre assemblé, correspondant à la source interne de chaleur $\bar{q}(x)$, dans le cas du maillage de la Figure 3. On donnera les résultats en fonction de $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$ et L.

10) **(1.5 points)** Calculer par éléments finis la température T_2 au nœud 2 du maillage de la Figure 3, dans le cas des conditions aux limites de la question 2). On donnera le résultat en fonction de T_0, T_L, k, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$ et L. Comparer le résultat avec la question 2).

11) **(1 point)** On note $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ les coordonnées nodales de la fonction test φ, n représentant le nombre de nœuds du maillage. Les nœuds sont numérotés par ordre croissant de 1 à n, de la gauche vers la droite, c'est-à-dire de x=0 à x=L. On stocke les coordonnées nodales de φ dans un vecteur noté $\underline{\varphi}$. On a donc : $\underline{\varphi}^T = \{\varphi_1, \quad \cdots \quad , \varphi_n\}$. Montrer que les termes associés au flux de chaleur dans l'équation (6) s'écrivent :

$$\phi_L \varphi(L) + \phi_0 \varphi(0) = \underline{\varphi}^T \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_L \end{Bmatrix} \tag{10}$$

12) **(0.25 point)** Calculer le second membre assemblé correspondant aux termes de flux de chaleur, dans le cas du maillage de la Figure 3 et des conditions aux limites de la question 3). Le résultat sera fourni en fonction de ϕ_0 et de ϕ_L.

13) **(2.25 points)** Calculer par éléments finis les températures T_2 et T_3 aux nœuds 2 et 3 du maillage de la Figure 3 avec les conditions aux limites de la question 2). On donnera le détail de l'inversion du système matriciel. Les résultats seront fournis en fonction de T_0, k, $\overline{q_0}$, $\overline{q_L}$, ϕ_L et L. Comparer les résultats avec la question 3).

14) **(0.75 point)** Le Tableau 1 contient des résultats numériques obtenus à l'aide de l'élément barre thermique LINK33 du logiciel ANSYS. Les calculs ont été réalisés avec les données numériques suivantes :

L=1 m, k=10 W/(m °C), T_0=0 °C, T_L=5 °C, $\overline{q_0}$=1000 W/m^3, $\overline{q_L}$=3000 W/m^3, ϕ_L =100 W/m^2

Comparer les résultats ANSYS avec ceux obtenus aux questions 2), 3), 10) et 13). Si besoin, on pourra utiliser les approximations suivantes : $\frac{250}{3} \simeq 83.333$; $\frac{700}{6} \simeq 116.67$

Conditions aux limites de la question 2)	Conditions aux limites de la question 3)
T_1=0	T_1=0
T_2=27.5	T_2=88.333
T_3=5	T_3=126.67

Tableau 1 – Calcul ANSYS

THERMIQUE – RAYONNEMENT (6 POINTS)

Q1) (2 points) On considère une cavité délimitée par un triangle équilatéral situé dans le plan (x,y) (Figure 4). Chacun des côtés du triangle rayonne thermiquement au sein de la cavité.

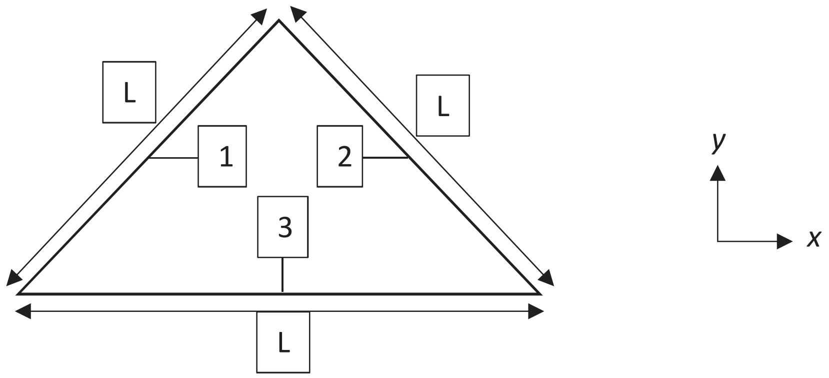

Figure 4 – Cavité radiative délimitée par un triangle équilatéral

Calculer les facteurs de forme F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32} et F_{33}.

Q2) (1point) Renseignez les 10 cases vides de la figure 5 afin d'être en cohérence avec le listing de la figure 6. Ce listing a été obtenu avec un élément de type solid70 du logiciel ANSYS.

STLOC Starting location N		
VAL1 Load HGEN at loc N		
VAL2 Load HGEN at loc N+1		
VAL3 Load HGEN at loc N+2		
VAL4 Load HGEN at loc N+3		

Figure 5 – Chargement Heat Generation

LIST ELEMENT HEAT GENERATIONS FOR ALL SELECTED ELEMENTS (NOTE: DATA IS SHOWN IN EXPANDED FORMAT, NOT USER INPUT FORMAT)

ELEMENT=1 HEAT GENERATIONS

800. 700. 800. 100.
600. 600. 10. 800.

Figure 6 – Listing Heat Generation

<u>Barème pour les questions qui suivent</u> :

Bonne réponse : + 0.75 ; Pas de réponse : 0 ; Mauvaise réponse : - 0.75. Une seule réponse par question.

Q3) L'émissivité a été fixée sous ANSYS à -10 (Figure 7).
Cela signifie que :
A] l'émissivité est égale à -10.
B] il y a dix surfaces qui rayonnent entre elles avec une émissivité égale à 10.
C] il y a dix surfaces qui rayonnent entre elles avec une émissivité égale à 1.
D] l'utilisateur souhaite définir une émissivité fonction de la température.

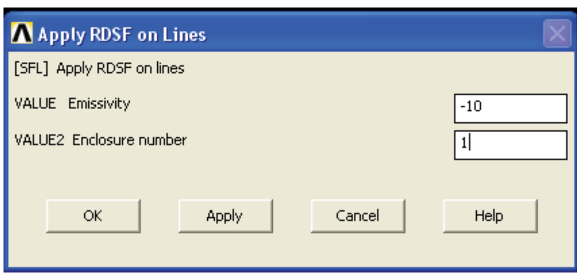

Figure 7 – Emissivité

Q4) Un calcul radiatif est exécuté avec ANSYS en utilisant le schéma de Newton-Raphson incrémental appliqué avec un nombre de pas de charge NSUBST égal à 10 (Figure 8). Cela signifie que :

A] la charge thermique est divisée par 10 et on procède en 10 étapes.
B] la charge thermique est multipliée par 10 et on procède en 10 étapes.
C] le calcul s'arrête lorsque le paramètre TIME passe de 0 à 10.
D] le nombre total d'itérations cumulées ne doit pas dépasser 10.

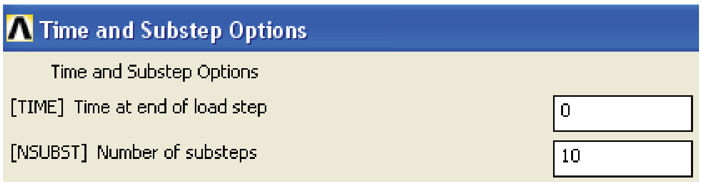

Figure 8 – Paramètre pour Newton-Raphson incrémental

Q5) Afin de gérer un transfert radiatif dans une cavité triangulaire, un utilisateur du logiciel ANSYS a appliqué sur chacun des trois côtés du triangle un paramètre « *Enclosure number* » égal à 2 (Figure 9).

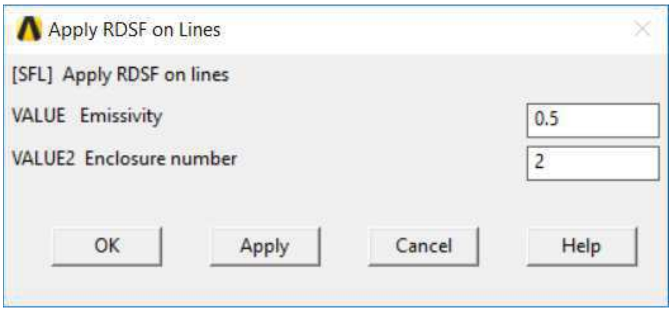

Figure 9 – Menu ANSYS

A] L'utilisateur a fait une erreur. Comme la cavité est un triangle, il aurait dû choisir la valeur 3.
B] L'utilisateur a fait une erreur. Comme il n'y a qu'une seule cavité, il aurait dû choisir la valeur 1.
C] L'utilisateur aurait pu prendre n'importe quelle valeur entière positive. Ce qui compte, c'est que cette valeur soit la même pour toutes les lignes délimitant la cavité.
D] L'utilisateur a fait une erreur. Il aurait dû choisir –2 (l'opposé de 2) car le paramètre « *Enclosure number* » doit être négatif.

Q6) Un problème thermique radiatif est un problème :

A] linéaire parce que le transfert thermique dépend de la puissance 1 de la température.
B] non linéaire parce que le transfert thermique dépend du carré de la température.
C] non linéaire parce que le transfert thermique dépend du cube de la température.
D] non linéaire parce que le transfert thermique dépend de la puissance 4 de la température.
E] parfois linéaire, parfois non linéaire. Cela dépend du cas traité.