SUJET A

Question 1 : réponse 3

Question 2 : réponse 1

Question 3 : $S_z \neq 0 \Rightarrow$ déformations planes

$\Rightarrow$ réponse 1

Question 4 : Les coordonnées des keypoints : $\overset{K1}{\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}}$; $\overset{K2}{\begin{Bmatrix}2\\0\end{Bmatrix}}$

Les valeurs de pression aux extrémités sont donc :

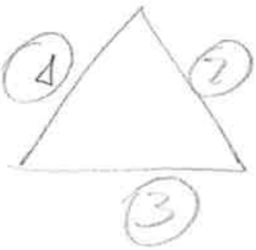
$14+8 = 22$ et $28+8 = 36$

Le keypoint est en premier dans la liste des lignes

$\Rightarrow$ réponse 3

Correction partie numérique du sujet

MN70 – P 2017



SOJET B

$$\underbrace{F_{11}}_{=0} + F_{12} + \overbrace{F_{13}}^{F_{12}} = 1 \Rightarrow F_{12} = F_{13} = \frac{1}{2}$$

$$F_{21} = F_{12} \text{ et } F_{31} = F_{13} \Rightarrow F_{21} = F_{31} = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{F_{21}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{F_{22}}_{=0} + F_{23} = 1 \Rightarrow F_{23} = \frac{1}{2}$$

$$F_{32} = F_{23} = \frac{1}{2} \qquad F_{33} = 0.$$

Conclusion :

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

$$F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{31} = F_{23} = F_{32} = \frac{1}{2}$$

SUJET C

Q1)

moyenne des trois rayons

$$\underline{\underline{k_1}} = \frac{k}{2ab}\ \underbrace{\frac{3R_i + 2a}{3}}_{\alpha}\ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} b^2 & -b^2 & 0 \\ -b^2 & a^2+b^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} & \end{array}$$

$$R_i + \frac{2a}{3} = \alpha$$

moyenne des trois rayons

$$\underline{\underline{k_2}} = \frac{k}{2ab}\ \underbrace{\frac{3R_i + a}{3}}_{\beta}\ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & b^2 & -b^2 \\ -a^2 & -b^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 3 & \quad 4 \end{matrix} & \end{array}$$

$$R_i + \frac{a}{3} = \beta$$

Q2)

$$\underline{\underline{K}} = \frac{k}{2ab}$$

	1	2	3	4
1	$\alpha b^2 + \beta a^2$	$-\alpha b^2$	$0 + 0$	$-\beta a^2$
2	$-\alpha b^2$	$\alpha(a^2+b^2)$	$-\alpha a^2$	
3	$0 + 0$	$-\alpha a^2$	$\alpha a^2 + \beta b^2$	$-\beta b^2$
4	$-\beta a^2$		$-\beta b^2$	$\beta(a^2+b^2)$

Q3) $$\underline{b_1} = \underbrace{\frac{\bar{q}_1 S_1}{12}}_{\dfrac{\bar{q}_1 ab}{24}} \begin{Bmatrix} 4R_i + 2a \\ 4R_i + 3a \\ 4R_i + 3a \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\underline{b_2} = \underbrace{\frac{\bar{q}_2 S_2}{12}}_{\dfrac{\bar{q}_2 ab}{24}} \begin{Bmatrix} 4R_i + a \\ 4R_i + 2a \\ 4R_i + a \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Q4) $$\underline{b} = \frac{ab}{24} \begin{Bmatrix} (4R_i+2a)\bar{q}_1 + (4R_i+a)\bar{q}_2 \\ (4R_i+3a)\bar{q}_1 \\ (4R_i+3a)\bar{q}_1 + (4R_i+2a)\bar{q}_2 \\ (4R_i+a)\bar{q}_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Q5) $$\frac{k}{2ab} \begin{bmatrix} -\alpha b^2 & \alpha(a^2+b^2) & -\alpha a^2 & 0 \\ -\beta a^2 & 0 & -\beta b^2 & \beta(a^2+b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ T_2 \\ \bar{T}_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{ab}{24} \begin{Bmatrix} (4R_i+3a)\bar{q}_1 \\ (4R_i+a)\bar{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha(a^2+b^2) & 0 \\ 0 & \beta(a^2+b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \frac{a^2b^2}{12k} \begin{Bmatrix} (4R_i+3a)\bar{q}_1 \\ (4R_i+a)\bar{q}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\alpha b^2 \bar{T}_1 - \alpha a^2 \bar{T}_3 \\ -\beta a^2 \bar{T}_1 - \beta b^2 \bar{T}_3 \end{Bmatrix}$$

Système diagonal facile à inverser.

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 = \dfrac{1}{\alpha(a^2+b^2)} \left\{ \dfrac{a^2b^2}{12k}(4Ri+3a)\overline{q_1} + \alpha(b^2\overline{T_1} + a^2\overline{T_3}) \right\} & (1) \\ T_4 = \dfrac{1}{\beta(a^2+b^2)} \left\{ \dfrac{a^2b^2}{12k}(4Ri+a)\overline{q_2} + \beta(a^2\overline{T_1} + b^2\overline{T_3}) \right\} & (2) \end{cases}$$

Q6) On remplace b par a dans (1) :

$$T_2 = \frac{1}{2\alpha a^2} \left\{ \frac{a^4}{12k}(4Ri+3a)\overline{q_1} + \alpha a^2(\overline{T_1}+\overline{T_3}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2}{12\alpha k}(4Ri+3a)\overline{q_1} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\} \qquad (3)$$

On remplace b par a dans (2) :

$$T_4 = \frac{1}{2\beta a^2} \left\{ \frac{a^4}{12k}(4Ri+a)\overline{q_2} + \beta a^2(\overline{T_1}+\overline{T_3}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2}{12\beta k}(4Ri+a)\overline{q_2} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\} \qquad (4)$$

Q7) $b = a = 3Ri \Rightarrow \alpha = Ri + 2Ri = 3Ri$; $\beta = Ri + Ri = 2Ri$

On remplace α et a dans (3) :

$$T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\frac{9Ri^2}{12 \times 3Ri \times k}}_{\frac{Ri}{4k}} \underbrace{(4Ri+9Ri)}_{13Ri}\overline{q_1} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{13Ri^2}{4k}\overline{q_1} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\}$$

On remplace β et a dans (4) :

$$T_4 = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\frac{9Ri^2}{12 \times 2Ri \times k}}_{= \frac{3Ri}{8k}} \underbrace{(4Ri+3Ri)}_{7Ri}\overline{q_2} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\}$$

$$\Rightarrow T_4 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{21Ri^2}{8k}\overline{q_2} + \overline{T_1} + \overline{T_3} \right\}$$

Q8) Q7)

$$T_2 = T_4 \overset{Q7)}{\Rightarrow} \frac{13 R_i^2}{4k} \overline{q_1} + \cancel{\overline{T_1}} + \cancel{\overline{T_3}} = \frac{21 R_i^2}{8k} \overline{q_2} + \cancel{\overline{T_1}} + \cancel{\overline{T_3}}$$

$$\Rightarrow 13 \overline{q_1} = \frac{21}{2} \overline{q_2} \Rightarrow 26 \overline{q_1} = 21 \overline{q_2}$$

Q9) En appliquant les formules de la question Q7), on obtient $T_2 = T_4 = 30.325\ C$

On remarque de plus que les données numériques obtenues par ANSYS vérifient :

$$\underset{6m}{b} = a = 3 \underset{2m}{R_i} \quad ; \quad \overline{q_2} = \frac{26}{21} \underbrace{\overline{q_1}}_{= 2} = 2.47619048\ W/m^3$$

Tout est donc cohérent.