DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées ainsi que les calculatrices ne permettant pas de communications interne et/ou externe.

L'usage d'autres moyens électroniques (ordinateur, téléphone, traducteur automatique etc.) est interdit.

Les deux problèmes I et II sont à rendre sur des feuilles séparées.

L'ensemble des questions représente un total de 25 points. L'examen sera noté sur 20, sans appliquer de règle de trois. Il y a donc 5 points bonus.

EXERCICE I – MÉCANIQUE DES STRUCTURES (5 POINTS)

Considérons un élément Q8 à 8 nœuds et 2 ddl par nœud, dans le repère de référence $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1\leq \eta \leq 1$. On applique, sur le côté 5 - 6 - 7 (voir Fig. 1), une pression constante dont la densité par unité de longueur est p=const.

- Calculer les forces équivalentes aux nœuds 5, 6 et 7.
- Est-ce que ces forces sont égales ? Pourquoi ?
- Vérifier si vos résultats sont corrects en calculant la somme de trois forces.

Les huit fonctions de forme de cet élément sont :

$N_1=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+ \xi+ \eta)$, $N_2=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$, $N_3=-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1- \xi+\eta)$, $N_4=\frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$,
$N_5=-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1- \xi- \eta)$, $N_6=\frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta)$, $N_7=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+ \xi- \eta)$, $N_8=\frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)$.

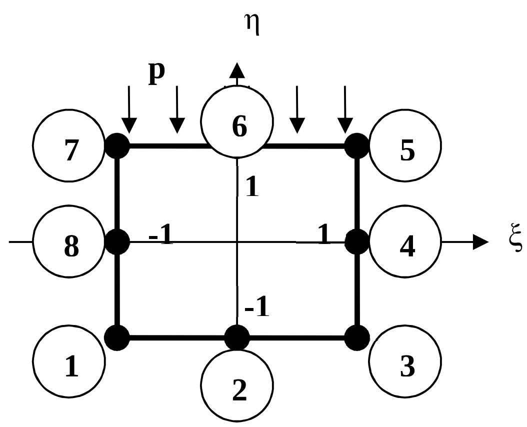


Fig. 1

EXERCICE II – THERMIQUE

SUJET A – QUESTIONS DE TP (4 points)

N.B. : Une seule réponse par question ; Bonne réponse : 1 point ; Pas de réponse : 0 point ; Mauvaise réponse : – 0.5 point

QUESTION 1 : quelle est le principe de la méthode de Newton-Raphson incrémental utilisée pour résoudre les problèmes non-linéaires ?

Réponse 1 : le principe consiste à résoudre directement le problème non-linéaire sans passer par un processus itératif de linéarisation. Les résultats obtenus avec cette approche ont été considérés comme tellement extraordinaires que le terme *incrémental* a été utilisé car il signifiait à l'époque *phénoménal*.

Réponse 2 : le principe consiste à incrémenter progressivement, à chaque itération, la taille du maillage, et ce afin d'améliorer la précision du calcul.

Réponse 3 : le principe consiste à diviser le chargement total en plusieurs incréments de charge afin de mieux approcher les non linéarités par une linéarisation tangente à chaque itération.

QUESTION 2 : quelle est le principe de la méthode de Newton-Raphson incrémental avec bissection utilisée pour résoudre les problèmes non-linéaires ?

Réponse 1 : le principe consiste à adapter l'algorithme de Newton-Raphson incrémental au contexte de l'étude. Les pas de charge sont réduits automatiquement en cas de difficultés de convergence. Ils sont augmentés sinon.

Réponse 2 : le principe consiste, à chaque itération, à augmenter d'un facteur deux la taille du maillage.

Réponse 3 : le principe est d'adapter l'algorithme de Newton-Raphson incrémental pour le traitement spécifique de structures poutres contenant deux sections différentes.

QUESTION 3 : un utilisateur du logiciel ANSYS a modélisé un problème de mécanique des solides en 2D avec un maillage comportant 6 nœuds. L'utilisateur est certain d'avoir coché soit l'option déformation plane, soit l'option contrainte plane. Mais il ne se souvient plus laquelle. Pour retrouver cette option, on a listé les contraintes dans le post-processeur :

```
                          ***** POST1 NODAL STRESS LISTING *****

 NODE    SX          SY             SZ          SXY          SYZ         SXZ
  1   -56546.    -0.25466E-10    -11309.      32700.       0.0000      0.0000
  2   -35194.      10014.        -5036.0      59896.       0.0000      0.0000
  3    18790.      75160.         18790.     0.10453E+06   0.0000      0.0000
  4   -43960.     -25053.        -13803.      52357.       0.0000      0.0000
  5   -18849.     0.42763E-03    -3769.7      76300.       0.0000      0.0000
  6   -7510.2     -30041.        -7510.2      81911.       0.0000      0.0000
```

Quel type de calcul a effectué l'utilisateur du logiciel ANSYS ?

Réponse 1 : calcul en déformations planes

Réponse 2 : calcul en contraintes planes

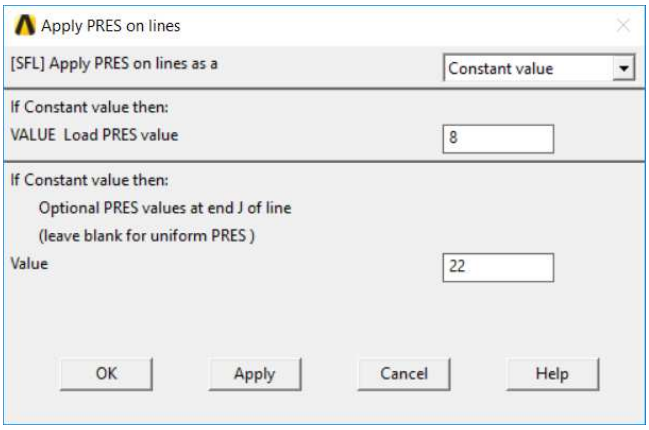
QUESTION 4 : un utilisateur du logiciel ANSYS souhaite appliquer une pression affine *p(x)=14x+8* sur une ligne horizontale. Il dispose pour cela des informations suivantes :

```
LIST ALL SELECTED LINES.
NUMBER    KEYPOINTS    LENGTH   (NDIV)(SPACE) KYND NDIV   SPACE   #NODE #ELEM   MAT   REAL   TYP   ESYS
  1        2      1      1.000      0    1.000   0                   0      0      0     0      0     0
```

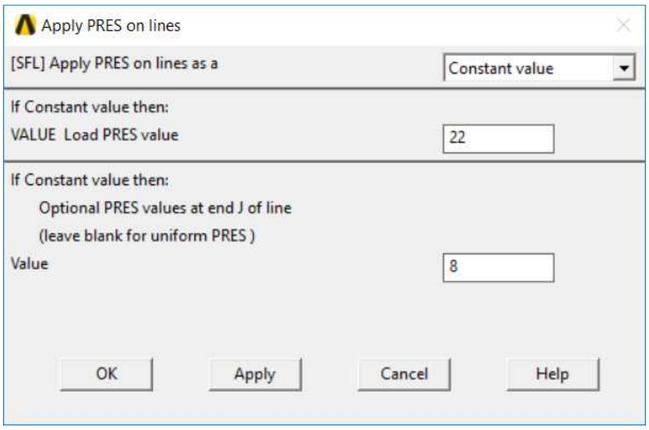
```
LIST ALL SELECTED KEYPOINTS.    DSYS=      0

NO.              X,Y,Z LOCATION                       THXY,THYZ,THZX    ANGLES
 1      1.000000      0.000000       0.000000        0.0000    0.0000    0.0000
 2      2.000000      0.000000       0.000000        0.0000    0.0000    0.0000
```

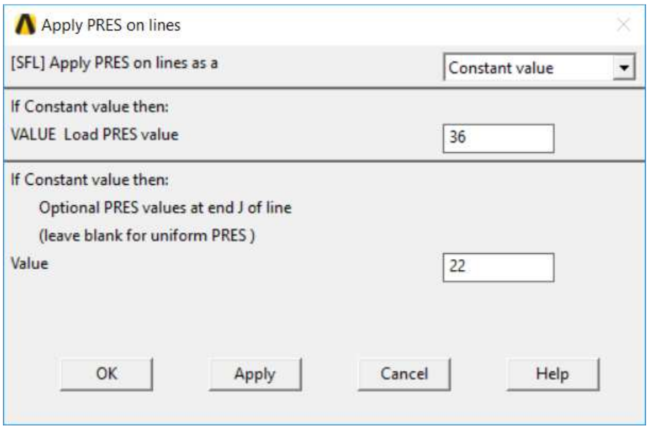
Parmi les cinq réponses proposées ci-dessous, indiquer celle qui correspond à la situation :



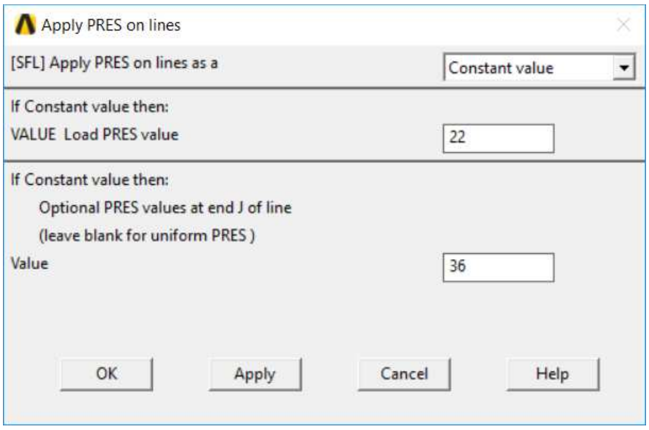
Réponse 1



Réponse 2



Réponse 3



Réponse 4

Réponse 5 : Aucune des quatre réponses précédentes ne convient.

SUJET B – TRANSFERT THERMIQUE RADIATIF (2 points)

On considère une cavité délimitée par un triangle équilatéral situé dans le plan (x,y) (Figure 1). Chacun des côtés du triangle rayonne thermiquement au sein de la cavité.

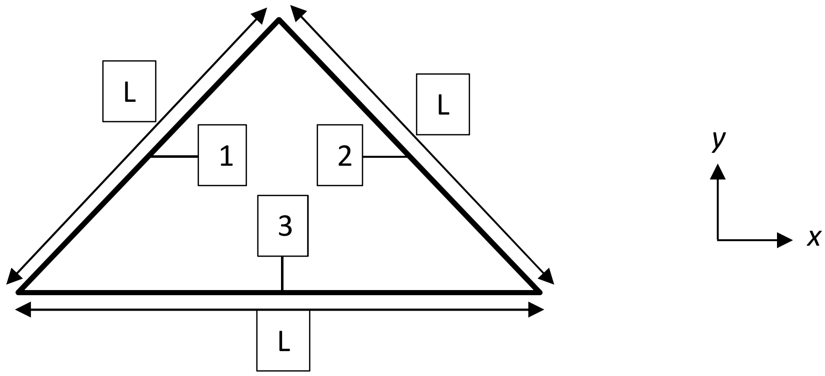


Figure 1 – *Cavité radiative délimitée par un triangle équilatéral*

Calculer les facteurs de forme F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32} et F_{33}.

SUJET C – TRANSFERT THERMIQUE EN CONDUCTION (9 points)

On considère un problème de conduction en **2D-axisymétrique**, stationnaire, sans convection et sans couplage avec la mécanique. Le matériau est supposé homogène et isotrope, de conductivité k $W/(m\,°C)$. La structure à étudier est le **cylindre creux** de rayon interne R_i représenté sur la Figure 2. Ce cylindre creux est modélisé par un maillage comportant 2 éléments triangulaires et 4 nœuds dont la numérotation et les coordonnées sont fournies sur la Figure 2. Les éléments 1 et 2 sont soumis à des sources internes volumiques de chaleur respectivement égales à $\bar{q}_1$ W/m^3 et $\bar{q}_2$ W/m^3. **Tous les calculs éléments finis seront réalisés <u>en respectant impérativement</u> la convention de numérotation locale de la Figure 3 ainsi que la numérotation globale des nœuds et des éléments qui est fournie sur la Figure 2.**

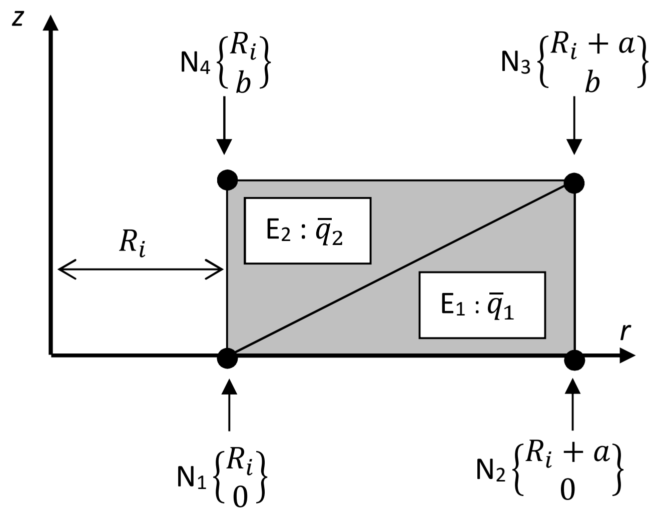


Figure 2 – Maillage éléments finis

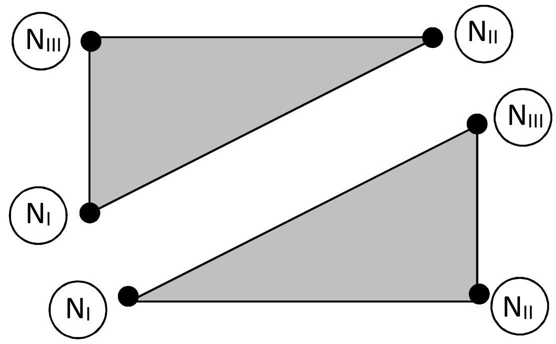


Figure 3 – Convention de numérotation locale

Question 1 (1 point) : Calculer les deux matrices de conductivité élémentaires en 2D-axisymétrique. Ces matrices seront exprimées en fonction de *a*, *b* et *k* ainsi que des deux coefficients α *et* β définis par :

$$\alpha = R_i + \frac{2a}{3} \; ; \; \beta = R_i + \frac{a}{3}$$

Pour permettre un calcul plus rapide, on donne les matrices élémentaires en 2D-plan :

$$\underline{\underline{k}}_{1\,(2D\,plan)} = \frac{k}{2ab}\begin{bmatrix} b^2 & -b^2 & 0 \\ -b^2 & a^2+b^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{\underline{k}}_{2\,(2D\,plan)} = \frac{k}{2ab}\begin{bmatrix} a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & b^2 & -b^2 \\ -a^2 & -b^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

Question 2 (1 point) : Assembler la matrice de conductivité. Le résultat sera donné en fonction de *a, b, k,* α, et β.

Question 3 (1.5 point) : Calculer les seconds membres élémentaires en fonction de *a*, *b*, R_i, $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$.

Question 4 (1 point) : Assembler le second membre. Le résultat sera donné en fonction de *a*, *b*, R_i, $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$.

Question 5 (2 points) : On impose les températures $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_3$ respectivement aux nœuds 1 et 3. Résoudre le système linéaire éléments finis associé à ces conditions. Le résultat sera donné en fonction de *a*, *b*, α, β, R_i, *k*, $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_3$.

Question 6 (1 point) : On considère dans cette question que *b=a*. Montrer à l'aide de la question 5 que :

$$T_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{12\alpha k}(4R_i + 3a)\bar{q}_1 + \bar{T}_1 + \bar{T}_3\right\} \; ; \; T_4 = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{12\beta k}(4R_i + a)\bar{q}_2 + \bar{T}_1 + \bar{T}_3\right\}$$

Question 7 (0.5 point) : On considère dans cette question que $b=a=3R_i$. Montrer à l'aide de la question 6 que :

$$T_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{13{R_i}^2}{4k}\bar{q}_1 + \bar{T}_1 + \bar{T}_3\right\} \; ; \; T_4 = \frac{1}{2}\left\{\frac{21{R_i}^2}{8k}\bar{q}_2 + \bar{T}_1 + \bar{T}_3\right\}$$

Question 8 (0.5 point) : Comme dans la question 7 précédente, on considère à nouveau que $b=a=3R_i$. Montrer que les deux températures inconnues T_2 et T_4 sont identiques ($T_2=T_4$) si et seulement si les sources volumiques de chaleur sont liées par l'égalité :

$$26\,\bar{q}_1 = 21\,\bar{q}_2$$

Question 9 (0.5 point) : Un calcul éléments finis a été réalisé à l'aide du logiciel ANSYS avec les données numériques suivantes :

a=6 m ; *b*=6 m ; R_i=2 m ; *k*=40 W/(m °C) ; $\bar{q}_1 = 2\ \mathrm{W/m^3}$; $\bar{q}_2 = 2.47619048\ \mathrm{W/m^3}$; $\bar{T}_1 = 50\ °\mathrm{C}$; $\bar{T}_3 = 10\ °\mathrm{C}$

Les résultats obtenus avec ANSYS sont les suivants : $T_2 = T_4 = 30.325\ C$. Est-ce que cela est cohérent avec les questions qui précèdent ?

EXERCICE III – MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN TRANSFERT THERMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES (5 POINTS)

On considère la dilution d'un colorant dans un fluide en mouvement en écoulement stationnaire dans un cas monodimensionnel. La variable étudiée est la concentration Φ en colorant. Il s'agit toujours d'une grandeur scalaire.

Pour un volume dans le cas monodimensionnel, l'équation de conservation de Φ est :

$$(\rho u\Phi)_e - (\rho u\Phi)_w - \left(\Gamma_\Phi \frac{d\Phi}{dx}\right)_e + \left(\Gamma_\Phi \frac{d\Phi}{dx}\right)_w = S_\Phi$$ Ici, $S_\Phi = 0$.

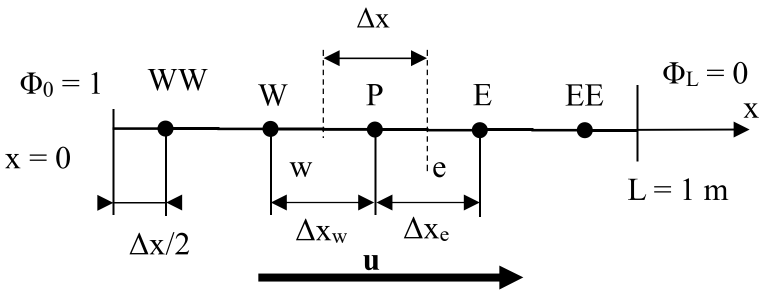
Une fois discrétisée, elle se traduit, pour le volume de centre P, par :

$$(\rho u)_e \Phi_e - (\rho u)_w \Phi_w - \frac{\Gamma_{\Phi e}}{\Delta x_e}(\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_{\Phi w}}{\Delta x_w}(\Phi_P - \Phi_W) = 0$$ (cf cours).

Pour toute l'étude, on utilisera les coefficients 2a = ρu et b = Γ_Φ/Δx.

A l'entrée du domaine, la concentration Φ en colorant est maximale et est égale à 1. A l'autre extrémité, elle est égale à 0. Le liquide a une masse volumique $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}. Le coefficient de diffusion $\Gamma_\Phi = 1$ kg/m.s.

L'objectif est de déterminer la distribution des concentrations dans le liquide en mouvement. Pour cela, on discrétise ce domaine dans sa longueur à l'aide de 5 volumes identiques de largeur Δx = 20 cm de la façon suivante :



Le problème est similaire à celui vu en TD. L'objectif est de trouver un schéma donnant de meilleurs résultats pour le cas 2 (u = 2,5 cm/s).

1) On envisage donc de traiter les termes convectifs en utilisant un autre schéma proposé par Fluent, il s'agit du schéma amont au second ordre.
Il s'écrit pour les faces w et e du volume de centre P :

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_W - \frac{1}{2}\Phi_{WW}, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_W \quad \text{si } u_w > 0 \text{ et } u_e > 0$$

ou

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_E, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_E - \frac{1}{2}\Phi_{EE} \quad \text{si } u_w < 0 \text{ et } u_e < 0$$

Les termes diffusifs sont traités de la même manière qu'en TD.

Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant les 5 volumes en fonction de a et b.
Exprimer les matrices de coefficients sous forme analytique puis numérique.
Calculer la distribution des concentrations uniquement dans le cas où u = 2,5 cm/s.

2) Pour mémoire, la solution analytique donne les résultats suivants :

	Φ_{WW}	Φ_W	Φ_P	Φ_E	Φ_{EE}
u = 2,5 cm/s	1	1	1	0,9994	0,9179

Comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la solution analytique. Pour cela, vous calculerez l'écart en pourcentage entre les deux séries de résultats. Commenter.