DUREE DE L'EXAMEN : 2 HEURES

Les notes de Cours, de TD et de TP sur support papier sont autorisées.

Les calculatrices sont interdites.

L'usage d'autres moyens électroniques (ordinateur, téléphone, traducteur automatique etc.) est également interdit.

Les trois sujets sont à rendre sur des feuilles séparées.

L'ensemble des questions représente un total de 27 points. L'examen sera noté sur 20, sans appliquer de règle de 3.

Les calculs devront être argumentés et justifiés. Tout résultat donné sans justification ne sera pas noté.

SUJET I – THERMIQUE EN CONDUCTION (14 POINTS)

On considère un problème de conduction de chaleur dans le plan (x,y). Le problème est stationnaire, sans convection ni rayonnement. La structure étudiée est soumise à une source interne de chaleur égale à 100 W/m^3, avec un matériau homogène isotrope de conductivité égale à 10 $W/(m\,°C)$. Le maillage est constitué de 4 éléments triangulaires et de 6 nœuds dont la numérotation et les coordonnées sont fournies sur la Figure 1. Tous les calculs éléments finis devront être réalisés **en respectant** la convention de numérotation locale de la Figure 2 ainsi que la numérotation globale des nœuds et des éléments de la Figure 1. On imposera une température de 5°C sur les nœuds 2, 4, 5 et 6.

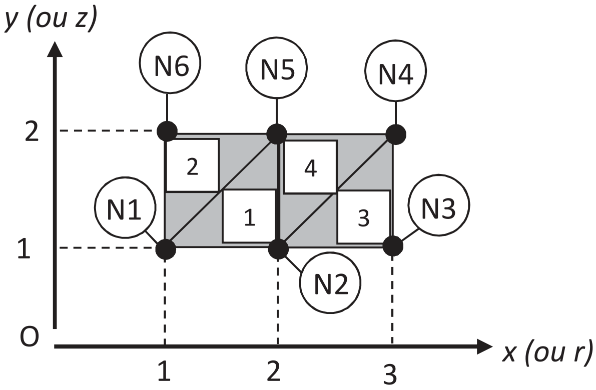


Figure 1 – Maillage éléments finis avec 4 éléments

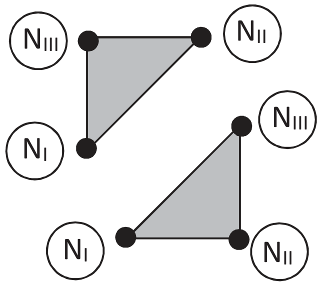


Figure 2 – Convention de numérotation locale

Question 1 (0.5 point) : Calculer (ou donner en justifiant) les quatre matrices de conductivité élémentaires ainsi que les quatre seconds membres élémentaires.

Question 2 (1 point) : Assembler la matrice de conductivité ainsi que le second membre.

Question 3 (1 point) : Calculer les températures T_1 et T_3 en résolvant le système linéaire éléments finis.

Question 4 (2 points) : On considère désormais que le problème est 2D-axisymétrique. L'axe horizontal x joue donc le rôle du rayon r et l'axe vertical y le rôle de l'axe de révolution z. Calculer les quatre matrices de conductivité élémentaires ainsi que les quatre seconds membres élémentaires.

Question 5 (2 points) : Assembler la matrice de conductivité ainsi que le second membre en 2D-axisymétrique.

Question 6 (1 point) : Calculer les températures T_1 et T_3 en résolvant le système linéaire éléments finis en 2D-axisymétrique.

Question 7 (0.5 point) : Application numérique.

Un calcul éléments finis a été réalisé à l'aide du logiciel ANSYS. Les résultats obtenus sont les suivants :

<u>2D plan</u> : $T_1 = 8.3333\ °C$; $T_3 = 6.6667\ °C$; <u>2D axisymétrique</u> : $T_1 = 8.0556\ °C$; $T_3 = 6.7188\ °C$.

Comparer avec les résultats des questions qui précèdent. On pourra se servir des quotients suivants pour effectuer la comparaison : $\frac{145}{18} \simeq 8.0555$; $\frac{215}{32} \simeq 6.71875$

On considère à partir de maintenant un maillage constitué d'un seul élément de surface S_e (Figure 3). On supposera que la numérotation locale des nœuds coïncide avec la numérotation globale de la Figure 3. La structure étudiée est soumise à une source interne de chaleur $\overline{q}$ en W/m^3 avec un matériau homogène isotrope de conductivité *k* en $W/(m\ °C)$. Les coordonnées des 3 nœuds seront respectivement pris égal à $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$. En 2D axisymétrique, la variable *x* joue le rôle du rayon *r* et la variable *y* celui de l'axe de révolution *z*. On imposera une température $\overline{T}$ sur les nœuds 2 et 3.

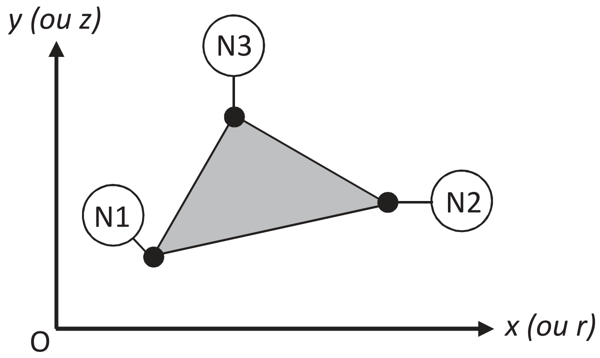


Figure 3 – Maillage éléments finis avec 1 élément

Question 8 (0.5 point) : Ecrire le système linéaire élément finis, de taille 3x3, **<u>en 2D plan</u>**, sous la forme $\underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \underline{b}$, où on exprimera la matrice $\underline{\underline{A}}$ en fonction de k, S_e, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3 et le vecteur $\underline{b}$ en fonction de $\overline{q}$ et S_e.

Question 9 (1.5 point) : Résoudre le système linéaire éléments finis **<u>en 2D plan</u>** et montrer que :

$$T_1 = \frac{4S_e^2\overline{q}}{3k}\frac{1}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \overline{T}$$

Question 10 (0.5 point) : Ecrire le système linéaire élément finis, de taille 3x3, **<u>en 2D axisymétrique</u>**, sous la forme $\underline{\underline{B}} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \underline{c}$, où on exprimera la matrice $\underline{\underline{B}}$ en fonction de $\underline{\underline{A}}$, x_1, x_2 et x_3 et le vecteur $\underline{c}$ en fonction de S_e, $\overline{q}$, x_1, x_2 et x_3.

Question 11 (1.5 point) : Résoudre le système linéaire éléments finis **en 2D axisymétrique** et montrer que :

$$T_1 = \frac{S_e^2 \overline{q}}{k} \frac{1}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3} + \bar{T}$$

Question 12 (1 point) : Pour plus de simplicité dans l'écriture, on note maintenant T et $\widetilde{T}$ les températures au nœud 1, respectivement en 2D plan et en 2D axisymétrique. En supposant que $T - \bar{T} > 0$ et que $\tilde{T} - \bar{T} > 0$ (c'est-à-dire que l'on apporte de la chaleur au système), et en utilisant les questions 9 et 11, montrer que : $\tilde{T} < T \;\Leftrightarrow\; x_1 < \frac{x_2 + x_3}{2}$

Question 13 (1 point) : Application numérique.

Un calcul éléments finis a été réalisé à l'aide du logiciel ANSYS avec les données suivantes : k=10 W/(m °C), $\bar{T}$=5 °C, $\bar{q}$=100 W/m^3

Si on effectue le calcul ANSYS avec les coordonnées suivantes : x_1=y_1=0 ; x_2=1 ; y_2=0 ; x_3=y_3=1, ANSYS fournit les résultats suivants : <u>2D plan</u> : $T_1 = 8.3333\ °C$; ; <u>2D axisymétrique</u> : $T_1 = 7.5\ °C$.

Si on effectue le calcul ANSYS avec les coordonnées suivantes : x_1=y_1=1 ; x_2=1 ; y_2=0 ; x_3=y_3=0, ANSYS fournit les résultats suivants : <u>2D plan</u> : $T_1 = 8.3333\ °C$; ; <u>2D axisymétrique</u> : $T_1 = 8.75\ °C$.

Comparer ces résultats avec les questions 9, 11 et 12.

SUJET II – MÉCANIQUE DES SOLIDES

EXERCICE EN 1D (5 POINTS)

Soit l'équation différentielle que vérifie la ligne élastique d'une barre :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) + P = 0 \text{ pour } 0 < x < 1$$

1er cas : Conditions limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 10 \end{cases}$$

1) Ecrire la formulation intégrale globale (FIG) et la formulation intégrale faible (FIF) du système.
2) On découpe la barre en deux éléments de même longueur, soit une longueur de l=1/2. On choisit une approximatio
nodale linéaire sur chaque élément. Ecrire les matrices élémentaires sur chaque élément.
3) Assembler les deux éléments
4) Introduire les conditions limites et calculer la solution aux nœuds en fonction de P.

2ème cas : Conditions limites de Dirichlet et Neumann :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dfrac{du}{dx}(1) = 10 \end{cases}$$

5) Ecrire la formulation intégrale faible.
6) On garde le même maillage et une approximation linéaire, écrire la matrice globale puis la matrice réduite.
7) Calculer la solution aux nœuds.
8) Si on souhaite calculer les contraintes dans la barre, est-ce que l'approximation linéaire est bien adaptée ? Justifi
votre réponse.

QUESTIONS DE TP (3 points)

N.B. : Une seule réponse par question ; Bonne réponse : 1 point ; Pas de réponse : 0 point ; Mauvaise réponse : – 1 point

QUESTION 1 : qu'est ce qui caractérise un problème de contraintes planes dans le plan (x,y) en mécanique des solides ?

Réponse 1 : des déplacements nuls dans le plan (x,y).

Réponse 2 : une déformation εzz nulle.

Réponse 3 : une contrainte σzz nulle.

QUESTION 2 : parmi les réponses suivantes, laquelle correspond à un élément triangulaire LST ?

Réponse 1 : les déplacements sont constants.

Réponse 2 : les déplacements sont linéaires.

Réponse 3 : les contraintes sont linéaires.

QUESTION 3 : Afin de représenter le comportement d'un barrage long dans sa profondeur par rapport à ses dimensions latérales, quelle est l'hypothèse de calcul la plus appropriée à utiliser ?

Réponse 1 : calcul en déformations planes.

Réponse 2 : calcul en contraintes planes.

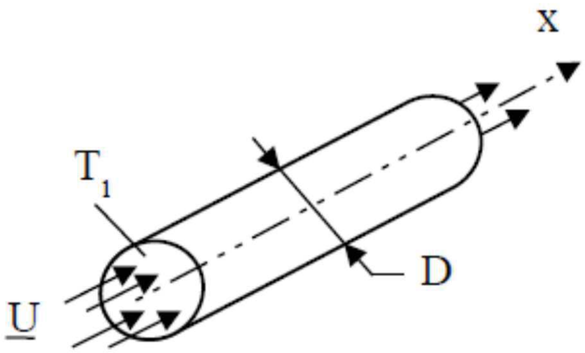
Réponse 3 : calcul en 2D-axisymétrique.

SUJET III – – MÉTHODE DES VOLUMES FINIS EN TRANSFERT THERMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES (5 POINTS)

Le travail proposé ici consiste à compléter l'étude faite en TD en envisageant une nouvelle approche.
Pour mémoire, on considère un tronçon de conduite de longueur L et de section circulaire constante dans laquelle s'écoule de l'eau. La paroi interne de la conduite est à une température constante T_c alors que l'eau est à la température constante T_1 à l'entrée du tronçon de conduite étudié.
On souhaite caractériser le réchauffement de l'eau au fur et à mesure de son écoulement dans ce tronçon.

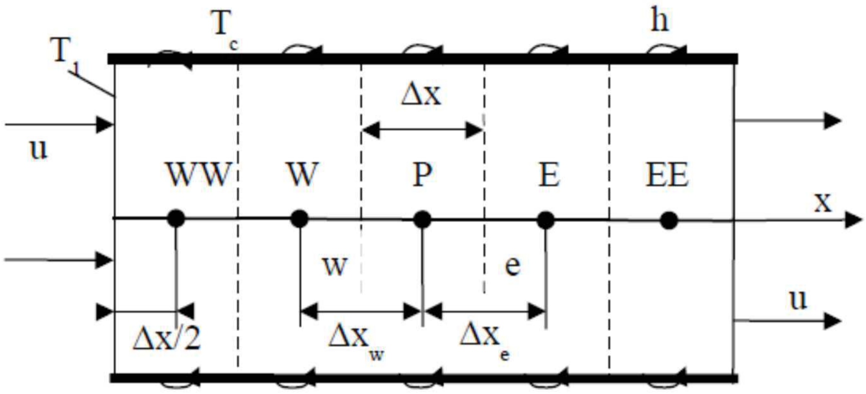
Les données sont :

- longueur L,
- diamètre D,
- coefficient d'échange h,
- conductivité thermique λ,
- capacité thermique massique c_{th},
- masse volumique ρ,
- vitesse d'écoulement u,
- sens d'écoulement : suivant l'axe des x.



Les conditions sont les mêmes qu'en TD. On a vu que, dans ce cas, les termes diffusifs étaient négligeables devant les termes convectifs.
Vous pouvez utiliser ce résultat pour l'étude présente.

La conduite est discrétisée en 5 volumes identiques selon le schéma vu en TD.



L'objectif de cette étude est de préparer un calcul à l'aide du schéma amont au second ordre.
Rappel : Il s'écrit pour les faces w et e du volume de centre P:

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_W - \frac{1}{2}\Phi_{WW}, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_W \quad \text{si } u_w > 0 \text{ et } u_e > 0$$

ou

$$\Phi_w = \frac{3}{2}\Phi_P - \frac{1}{2}\Phi_E, \quad \Phi_e = \frac{3}{2}\Phi_E - \frac{1}{2}\Phi_{EE} \quad \text{si } u_w < 0 \text{ et } u_e < 0$$

1) Rappeler les hypothèses nécessaires à l'étude.
2) Exprimer sous forme analytique le système d'équations caractérisant la température pour les 5 volumes.
3) En déduire les matrices de coefficients sous forme analytique.