

Date : Mardi 24 Juin 2008

U.V :

Semestre : AUTOMNE  PRINTEMPS

Examen : Médian

Final

NOM : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Né(e) le : \_\_\_\_\_

DEPARTEMENT :

NIVEAU : \_\_\_\_\_ FILIERE : \_\_\_\_\_

Le sujet se compose de 3 exercices totalement indépendants.

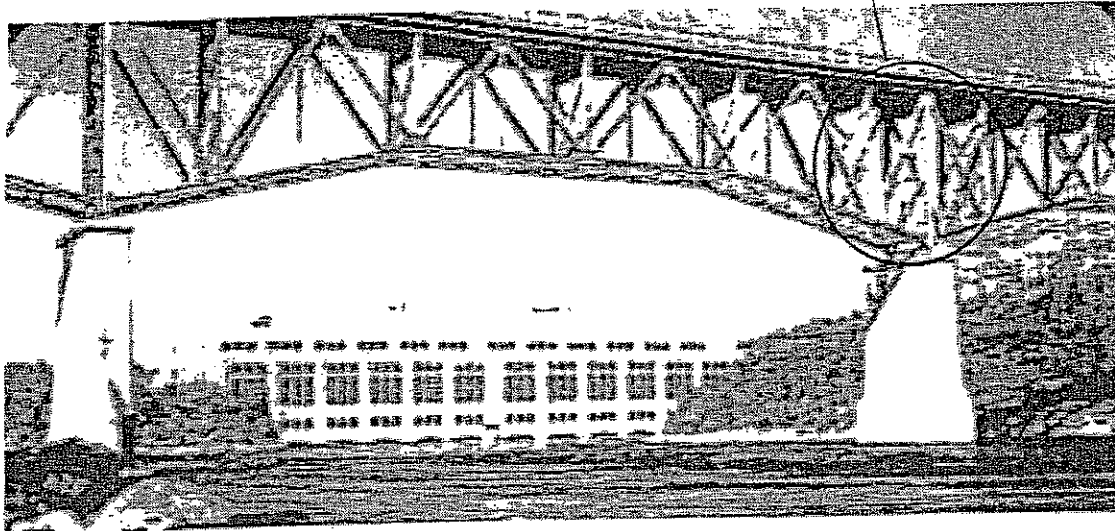
ELEMENTS DE CORRIGE

Signature :

Durée de l'épreuve : 2 heures  
Formulaire personnel format (A4-RV) autorisé  
Calculatrice autorisée

Exercice n°1

Structure étudiée



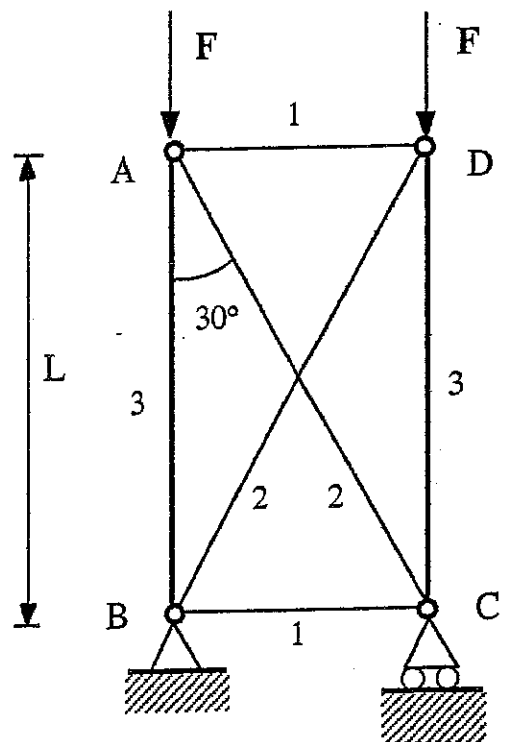
On considère le treillis plan hyperstatique parfaitement articulé représenté ci-contre.

Les barres (1) et (2) ont la même section  $s$  et les barres (3) ont pour section  $S$ .

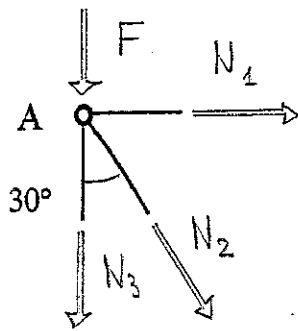
Les barres (3) ont pour longueur  $L$ .  
On note  $E$  le module de Young du matériau.

On néglige le poids propre des barres devant le chargement appliqué.

On note  $N_i$  les efforts normaux dans les barres avec  $N_i > 0$  (traction) et  $N_i < 0$  (compression).



- 1- Représenter les actions des barres sur le noeud A et écrire les équations d'équilibre de ce noeud.



$$N_1 + N_2 \sin 30^\circ = 0$$

0,5

$$N_3 + N_2 \cos 30^\circ + F = 0$$

0,5

0,5

- 2- Donner l'expression des efforts  $N_1$  et  $N_3$  en fonction des efforts  $N_2$  et  $F$ .

$$N_1 = -\frac{N_2}{2}$$

$$N_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} N_2 - F$$

0,5

0,5

- 3- Calculer la longueur des barres 1 et 2.

$$L_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$L_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} L$$

0,5

0,5

- 4- Energie de déformation élastique  $U$ .

- 41- Expression de  $U$  en fonction des  $N_i$ .

$$U = \frac{L}{E} \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{N_1^2}{\Delta} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{N_2^2}{\Delta} + \frac{N_3^2}{S} \right]$$

1,5

- 42- Expression de  $U$  en fonction de  $N_2$  et de  $F$ .

$$U = \frac{L}{E} \left[ \frac{\sqrt{3}}{3\Delta} \left( \frac{N_2}{2} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3\Delta} N_2^2 + \frac{1}{S} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 + F \right)^2 \right]$$

1,5

(sans développer les expressions de  $N_1$  et de  $N_3$  calculées à la question précédente)

5- Calculer l'inconnue hyperstatique  $N_2$ .

Théorème utilisé :

MENABREA

Expression :

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = 0$$

0,5

0,5

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = 0 \text{ entraîne :}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6\lambda} N_2 + \frac{4\sqrt{3}}{3\lambda} N_2 + \frac{\sqrt{3}}{S} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 + F \right) = 0$$

en simplifiant par  $\sqrt{3}$

$$\left( \frac{3}{\lambda} + \frac{\sqrt{3}}{S} \right) \frac{N_2}{2} + \frac{F}{S} = 0$$

$$\frac{3S + \sqrt{3}\lambda}{2\lambda S} N_2 + \frac{F}{S} = 0$$

$$N_2 = - \frac{2\lambda}{\sqrt{3}\lambda + 3S} F$$

1,5

6- Valeur des efforts  $N_1$  et  $N_3$ .

$$N_1 = - \frac{N_2}{2}$$

$$N_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 - F$$

$$= - F \left( 1 - \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}\lambda + 3S} \right)$$

$$N_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}\lambda + 3S} F$$

$$N_3 = - \frac{3S}{\sqrt{3}\lambda + 3S} F$$

0,5

0,5

7- Calculer la contrainte  $\sigma_i$  dans chacune des barres du treillis.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A}$$

$$\text{et } \sigma_3 = \frac{N_3}{S}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}A + 3S} F \quad 0,5$$

$$\sigma_2 = - \frac{2}{\sqrt{3}A + 3S} F$$

$$\sigma_3 = - \frac{3}{\sqrt{3}A + 3S} F \quad 0,5$$

8- Calculer, avec le critère de Tresca, la contrainte équivalente  $\sigma_{\text{équi } i}$  dans chacune des barres du treillis.

$$\sigma_{\text{équi } i} = \sigma_{\text{max } i} - \sigma_{\text{min } i}$$

$$\sigma_{\text{équi } 1} = \frac{1}{\sqrt{3}A + 3S} F \quad 0,5$$

$$\sigma_{\text{équi } 2} = \frac{2}{\sqrt{3}A + 3S} F$$

$$\sigma_{\text{équi } 3} = \frac{3}{\sqrt{3}A + 3S} F \quad 0,5$$

9- En déduire l'expression de la section  $s$  des barres (1) et (2).

On note :  $\sigma_e$  la limite élastique du matériau à la traction,

$n_e$  le coefficient de sécurité à la limite élastique.

condition de résistance

$$n_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équi } \text{max } i}}$$

$$\text{avec } \sigma_{\text{équi } \text{max } i} = \sigma_{\text{équi } 3}$$

d'où

$$n_e = \frac{(\sqrt{3}A + 3S)\sigma_e}{3F}$$

$$s = \sqrt{3} \left( \frac{n_e F}{\sigma_e} - S \right) \quad 1$$

10- Application numérique.

On prendra :  $F = 1\,200\text{ kN}$ ,  $L = 12\text{ m}$ ,  $s = 28,9\text{ cm}^2$ ,  $S = 71,4\text{ cm}^2$ ,  
 $\sigma_e = 240\text{ MPa}$  et  $E = 210\text{ GPa}$

Calculer les efforts et les contraintes dans les barres.

$N_1 = 131,2\text{ kN}$	$N_2 = -262,4\text{ kN}$	$N_3 = -972,7\text{ kN}$
-------------------------	--------------------------	--------------------------

$\sigma_1 = 45,4\text{ MPa}$	$\sigma_2 = -90,8\text{ MPa}$	$\sigma_3 = -136\text{ MPa}$
------------------------------	-------------------------------	------------------------------

Calculer l'énergie de déformation élastique U.

$U = 6,5 \cdot 10^{-9}\text{ F}^2$	$U = 9360\text{ Joules}$
------------------------------------	--------------------------

11- Calculer le déplacement vertical  $v_A$  du point A.

Théorème utilisé : CASTIGLIANO Expression :  $v_A = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial F}$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = 2 \times 6,5 \cdot 10^{-9} F$$

$$v_A = 6,5 \cdot 10^{-9} F$$

$v_A = 7,8\text{ mm}$
-----------------------

12- Calculer le coefficient de sécurité  $n_e$  à la limite élastique de la structure.

$$n_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{requi}_3}}$$

$n_e = 1,7$
-------------

## Exercice n°2

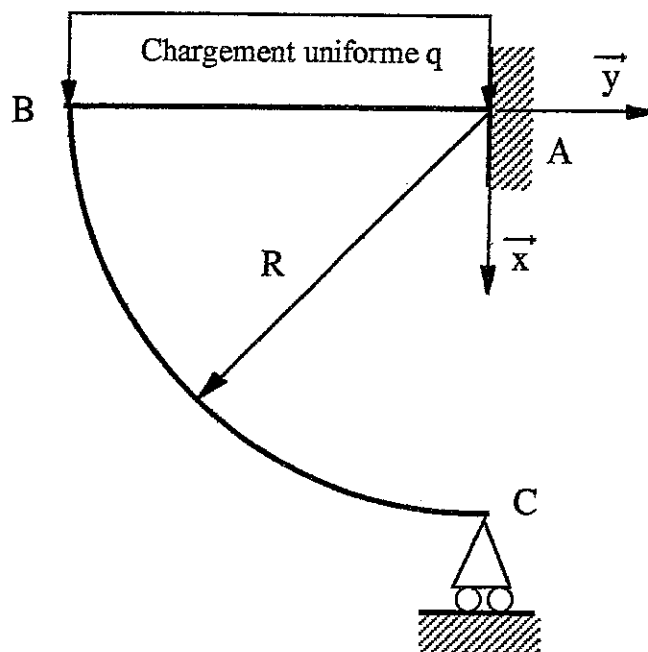
On considère la structure plane représenté ci-dessous.

Elle est constituée d'une poutre droite (AB) et d'une poutre courbe (BC).

- la poutre (AB) de ligne moyenne rectiligne de longueur  $R$  parfaitement encastrée en A avec le bâti fixe,
- la poutre (BC) de ligne moyenne un quart de cercle de rayon  $R$  parfaitement encastrée en A avec la poutre (AB) et en appui simple en C avec le bâti fixe.

Le chargement est représenté par une répartition uniforme de charges  $q$  appliquées sur la partie rectiligne (AB) de la structure.

Le poids propre de la structure est négligeable devant le chargement appliqué.



1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème

11- Ecrire les trois équations d'équilibre de la structure (ABC).

$H_A = 0$

$V_A + V_C - qR = 0$

$M_A + q \frac{R^2}{2} = 0$

(équation de moment en A)

0,5

0,5

1

12- En déduire la valeur des composantes  $H_A$  et  $M_A$  et la relation liant les composantes  $V_C$  et  $V_A$ .

On décide de garder  $V_A$  comme inconnue hyperstatique

$H_A = 0$

$M_A = -q \frac{R^2}{2}$

$V_C = -V_A + qR$

0,5

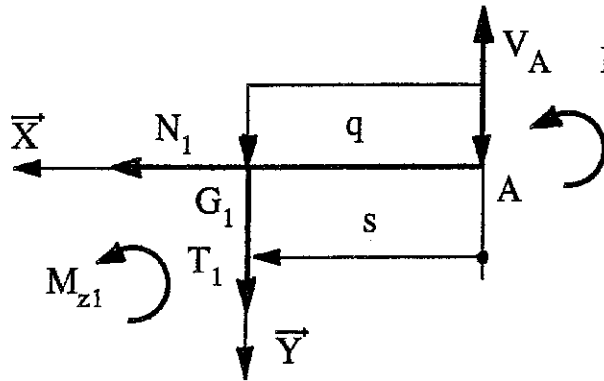
0,5

0,5



2- Déterminer les expressions du moment de flexion  $M_z$  en G (centre de la section droite du profilé).

21- En  $G_1$ , tel que  $\overline{AG}_1 = s \overline{X}$  ( $0 \leq s \leq R$ ).



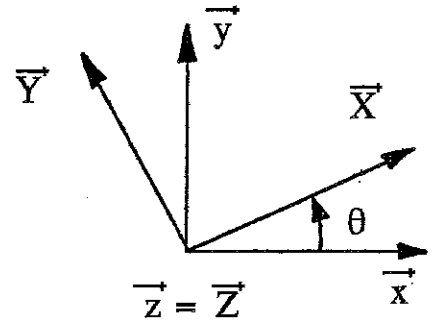
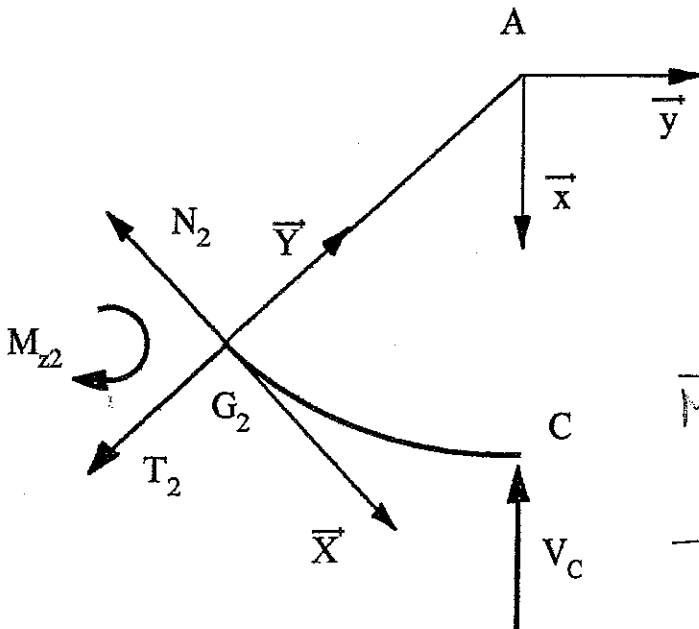
$$\vec{M}_G \{ \overline{AG}_1 \rightarrow A G_1 \} \cdot \vec{Z} = 0$$

$$M_{z1} + M_A + V_A z - q \frac{z^2}{2} = 0$$

$$M_{z1} = \frac{q}{2} (R^2 + z^2) - V_A z$$

2

12- En  $G_2$ , avec ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ).



$$\vec{M}_{G_2} \{ \overline{G_2 C} - G_2 C \} = \vec{0}$$

$$-M_{z2} \vec{Z} + \overline{G_2 C} \wedge (-V_c \vec{x}) = \vec{0}$$

$$-M_{z2} \vec{Z} + R (\vec{Y} + \vec{x}) \wedge (-V_c \vec{x}) = \vec{0}$$

$$-M_{z2} - V_c R (-\cos \theta) = 0$$

avec :  $V_c = qR - V_A$

$$M_{z2} = (qR - V_A) R \cos \theta$$

4

- 3- Calcul de l'énergie de déformation élastique  $U$  de la structure  
 Ecrire, sans développer le calcul des intégrales, l'expression de l'énergie de déformation élastique  $U_{ABC}$  de la structure (ABC) calculée en fonction du moment de flexion  $M_z$ .

On note  $EI$  le module de rigidité à la flexion  $EI_{Gz}$  constant de la structure.

$$\begin{aligned}
 U_{ABC} &= \int_{\vec{ABC}} dU \quad \text{avec } dU = \frac{M_z^2}{2EI_{Gz}} ds \\
 &= \int_{\vec{AB}} dU_1 + \int_{\vec{BC}} dU_2 \\
 &= \int_{\vec{AB}} \frac{M_{z1}^2}{2EI_{Gz}} ds + \int_{\vec{BC}} \frac{M_{z2}^2}{2EI_{Gz}} ds
 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } M_{z1} = \frac{q}{2}(R^2 + x^2) - V_A x$$

$$M_{z2} = (qR - V_A)R \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned}
 U_{ABC} = & \frac{1}{2EI} \int_0^R \left[ \frac{q}{2}(R^2 + x^2) - V_A x \right]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (qR - V_A)^2 R^3 \cos^2 \vartheta d\vartheta
 \end{aligned}$$

2

4- Valeur de l'inconnue hyperstatique  $V_A$ .

Théorème utilisé :

MENABREA

Expression :

$$\frac{\partial U}{\partial V_A} = 0$$

0,5

0,5

Inconnue hyperstatique  $V_A$  :

$$\int_0^R \left[ \frac{q}{2} (R^2 + x^2) - V_A x \right] (-x) dx +$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (qR - V_A) R \cos \theta (-R \cos \theta) R d\theta = 0$$

$$\left[ \frac{q}{2} \left( \frac{R^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) - V_A \frac{x^3}{3} \right]_0^R +$$

$$(qR - V_A) R^3 \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\frac{qR^4}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - V_A \frac{R^3}{3} + (qR - V_A) \frac{\pi R^3}{4} = 0$$

$$qR^4 \left( \frac{3}{8} + \frac{\pi}{4} \right) - V_A R^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$V_A = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + \pi \right)}{\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}} qR$$

(Valeur approchée)

$$V_A = \frac{3(3+2\pi)}{2(4+3\pi)} qR$$

$$V_A = 1,037 qR$$

3

0,5

(Valeur exacte)

5- Calcul des déplacements.

51- Rappeler les expressions du moment fléchissant  $M_z$

On notera :  $V_A = \alpha qR$

$$M_{z1} = \frac{q}{2} (R^2 - 2\alpha R x + x^2)$$

$$M_{z2} = qR^2(1-\alpha) \cos \theta$$

52- Calculer le déplacement  $\overline{\Delta B}$  de la section de centre B par la 2<sup>o</sup> formule de Bresse

$$\begin{aligned} \overline{\Delta B} &= \overline{\Delta A} + \overline{\Omega}_A \wedge \overline{AB} + \int_{\overline{AB}} \overline{d\Omega} \wedge \overline{GB} \\ \overline{\Delta A} &= \overline{\Omega}_A = \vec{0} && \text{encastrement parfait avec un bâti fixe.} \\ &= \int_{\overline{AB}} \overline{d\Omega} \wedge \overline{GB} \\ &= \int_{\overline{AB}} \frac{M_{z1}}{EI_{Gz}} \vec{z} \wedge (R-x) \vec{x} dx \\ &= \int_0^R \frac{1}{EI} \frac{q}{2} (R^2 - 2\alpha R x + x^2) (R-x) \vec{y} dx \\ &= \frac{q}{2EI} \vec{y} \left[ R^3 x - \alpha x^2 R^2 + R \frac{x^3}{3} - R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{2\alpha x^3 R}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \\ &\rightarrow = \frac{qR^4}{2EI} \left[ \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \alpha \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \right] \vec{y} \end{aligned}$$

(En fonction de  $\alpha$ )

$$\Delta B_x = \frac{1}{6} \left( \frac{7}{4} - \alpha \right) \frac{qR^4}{EI}$$

(On remplaçant  $\alpha$ )

$$\Delta B_x = 0,1188 \frac{qR^4}{EI}$$

4  
1

6- On retient pour la structure un profilé de type IPE.

61- Déterminer le moment quadratique  $I_{GZ}$  du profilé.

On donne :

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, q = 3500 \text{ N/m}, \Delta B_{x \text{ maxi}} = 6 \text{ mm}, R = 2 \text{ m et } \sigma_e = 320 \text{ MPa}$$

$$\Delta B_x = 0,1188 \frac{qR^4}{EI_{GZ}}$$

$$\Delta B_x \leq \Delta B_{x \text{ maxi}}$$

d'où

$$I_{GZ} \geq \frac{0,1188 qR^4}{E \Delta B_{x \text{ maxi}}}$$

$$I_{GZ} = 528 \text{ cm}^4 \quad \boxed{1}$$

62- A l'aide du tableau page 14, déterminer le profilé retenu

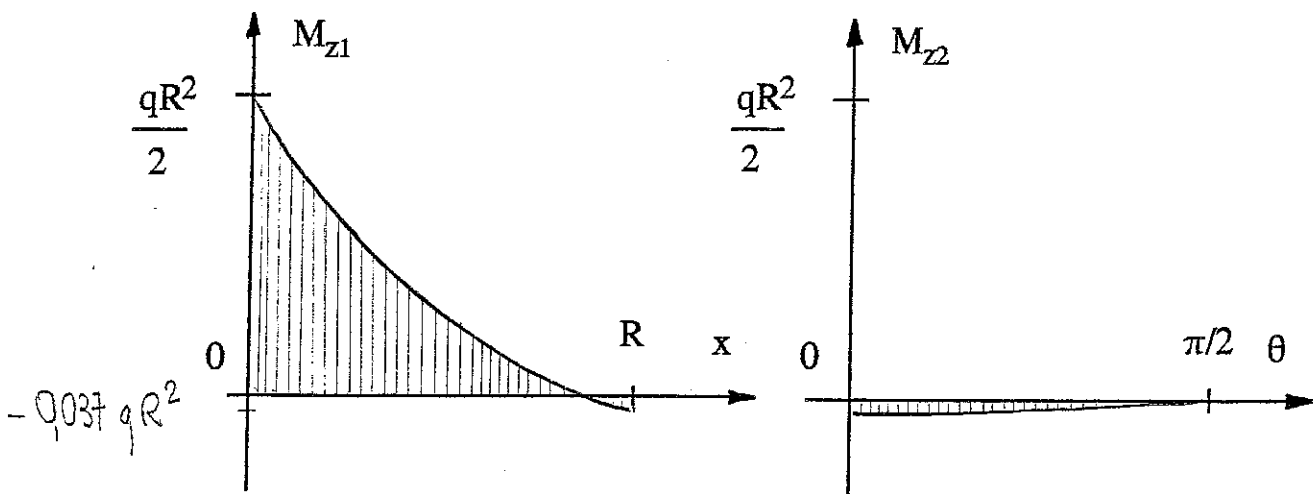
$$\text{IPE 140} \quad I_{GZ} = 541 \text{ cm}^4$$

$$\text{IPE : 140} \quad \boxed{1}$$

7- Tracer le diagramme du moment de flexion  $M_z$  entre A et B et entre B et C

$$M_{z1} = \frac{q}{2} (R^2 - 2,074 Rx + x^2)$$

$$M_{z2} = -0,037 qR^2 \cos \theta$$



$\boxed{1}$

$\boxed{1}$

8- Déterminer la section la plus sollicitée.

$$M_{z_{\max}} = M_{z1}(x=0) = q \frac{R^2}{2}$$

Section de centre : A

1

9- Calculer la contrainte normale maximale  $\sigma_{\max}$ .

$$\sigma = - \frac{M_{z1}}{I_{Gz}} y$$
$$\rightarrow = - \frac{qR^2}{2I_{Gz}} y$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3500 \times 4 \times 0,140}{4 \times 541 \cdot 10^{-8}}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma \left( y = -\frac{h}{2} \right)$$
$$\rightarrow = \frac{qR^2 h}{4I_{Gz}}$$

$$\sigma_{\max} = 90,6 \text{ MPa}$$

1

10- En déduire le coefficient de sécurité  $n_e$  de la structure.

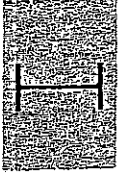
$$\sigma_{\text{requi}} = \sigma_{\max}$$

$$n_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{requi}}}$$

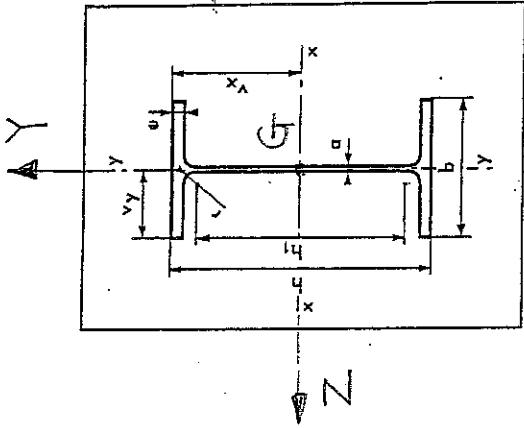
$$n_e = \frac{320}{90,6}$$

$$n_e = 3,5$$

1



**POUTRELLES IPE**



Norme de référence :  
NF A 45-205 (août 1962).

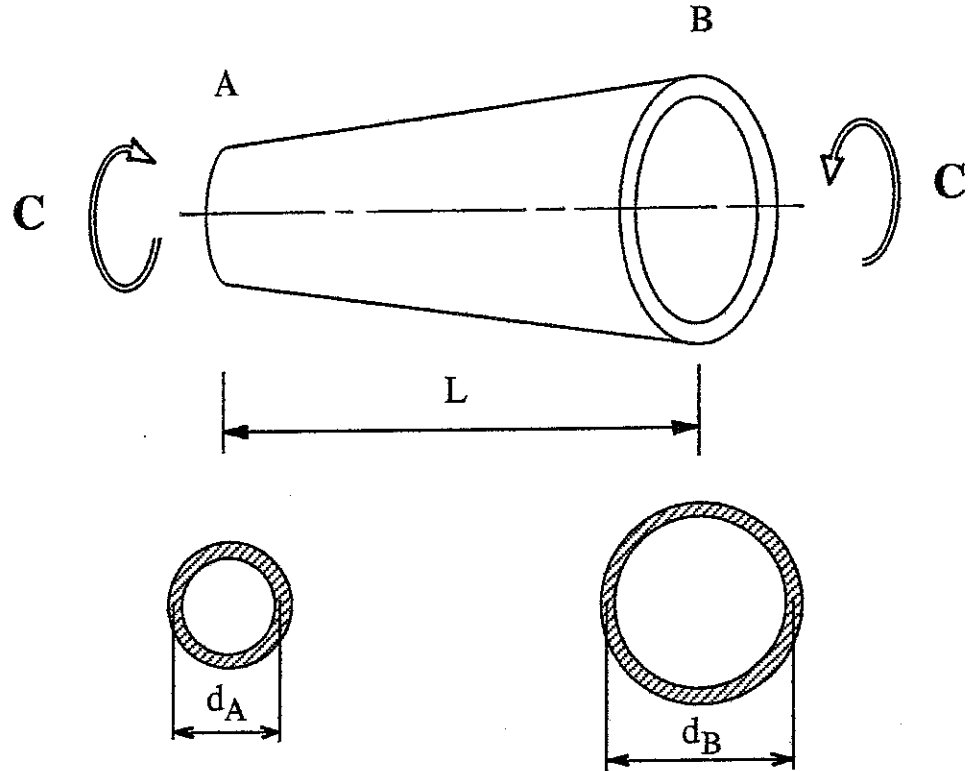
Profils	Dimensions						Masse par mètre P kg	Section A cm <sup>2</sup>	Surface de peinture m <sup>2</sup> /m	Profils	Caractéristiques rapportées à l'axe neutre								Moment d'inertie de torsion J cm <sup>4</sup>	Module de raideur d cm	
	h mm	b mm	a mm	e mm	r mm	Partie droite de l'âme h <sub>1</sub> mm					I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	$\frac{I_x}{v_x}$ cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> cm	Moment statique S cm <sup>3</sup>	Distance des centres cm	η <sub>K</sub>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	$\frac{I_y}{v_y}$ cm <sup>3</sup>			i <sub>y</sub> cm
80	80	46	3,8	5,2	5	60	7,64	0,329	54,8	80	80,1	20,0	3,24	11,6	6,9	3,33	8,49	3,69	1,05	0,70	0,299
100	100	55	4,1	5,7	7	75	10,3	0,401	49,5	100	171	34,2	4,07	19,7	8,7	4,22	15,9	5,79	1,24	1,10	0,313
120	120	64	4,4	6,3	7	93	13,2	0,474	45,6	120	318	53,0	4,90	30,4	10,5	5,10	27,7	8,65	1,45	1,71	0,336
140	140	73	4,7	6,9	7	112	16,4	0,550	42,6	140	541	77,3	5,74	44,2	12,2	5,99	44,9	12,3	1,65	2,54	0,359
160	160	82	5,0	7,4	9	127	20,1	0,622	39,4	160	869	109	6,58	61,9	14,0	6,90	68,3	16,7	1,84	3,53	0,379
180	180	91	5,3	8,0	9	146	23,9	0,698	37,1	180	1317	146	7,42	83,2	15,9	7,76	101	22,2	2,05	4,90	0,404
200	200	100	5,6	8,5	12	159	28,4	0,768	34,3	200	1943	194	8,26	110	17,6	8,66	142	28,5	2,24	6,46	0,425
220	220	110	5,9	9,2	12	178	26,2	0,848	32,4	220	2772	252	9,11	143	19,4	9,62	205	37,3	2,48	8,86	0,460
240	240	120	6,2	9,8	15	190	30,7	0,921	30,0	240	3892	324	9,97	163	21,2	10,55	284	47,3	2,69	11,60	0,490
270	270	135	6,6	10,2	15	220	36,1	1,04	28,8	270	5790	429	11,2	239	24,2	11,88	420	62,2	3,02	14,93	0,510
300	300	150	7,1	10,7	15	249	42,2	1,16	27,5	300	8356	557	12,5	314	26,6	13,20	604	80,5	3,35	19,47	0,535
330	330	160	7,5	11,5	18	271	49,1	1,25	25,5	330	11770	713	13,7	402	29,3	14,52	788	98,5	3,55	25,70	0,558
360	360	170	8,0	12,7	18	299	57,1	1,35	23,6	360	16270	904	15,0	510	31,9	15,83	1043	123	3,79	36,20	0,600
400	400	180	8,6	13,5	21	331	66,3	1,47	22,2	400	23130	1160	16,5	654	35,4	17,50	1318	146	3,95	46,80	0,607
450	450	190	9,4	14,6	21	379	77,6	1,61	20,7	450	33740	1500	18,5	849	39,7	19,33	1676	176	4,12	63,80	0,616
500	500	200	10,2	16,0	21	426	90,7	1,74	19,2	500	48200	1930	20,4	1100	43,9	21,28	2142	214	4,31	89,00	0,640
550	550	210	11,1	17,2	24	468	106	1,88	17,7	550	67120	2440	22,3	1390	48,2	23,02	2668	254	4,45	118,4	0,657
600	600	220	12,0	19,0	24	514	122	2,02	16,6	600	92080	3070	24,3	1760	52,4	25,16	3387	308	4,66	166,2	0,697

### Exercice n°3

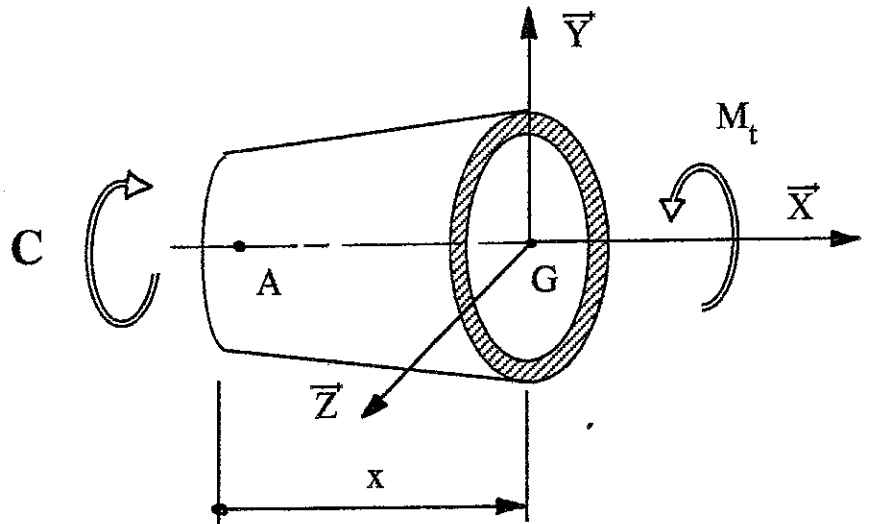
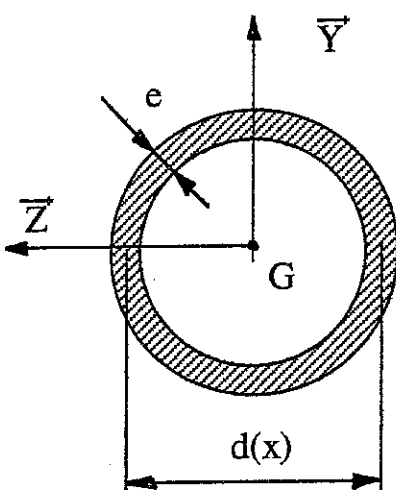
On considère un tube mince conique (AB) de section circulaire, de longueur  $L$ , d'épaisseur  $e$  constante, de diamètres moyens  $d_A$  et  $d_B$  à ses extrémités A et B.

Le chargement est représenté par deux couples  $C$  égaux et opposés appliqués aux extrémités A et B.

Le poids propre du tube est négligeable devant le chargement appliqué.



1- Déterminer le moment de torsion  $M_t$  en G (centre de la section droite du tube).



$$\vec{M}_G \cdot \{ \vec{AG} - AG \} \cdot \vec{X} = 0$$

$$M_t = C$$

1



2- Déterminer la rotation de la section de centre B par rapport à la section de centre A.

21- Exprimer le diamètre moyen  $d(x)$  de la section courante de centre G en fonction de  $d_A$ ,  $d_B$  et  $x$ .

notons  $d(x) = a + bx$

(CL1)  $d(x=0) = d_A$

(CL2)  $d(x=L) = d_B$

$$\begin{cases} d_A = a \\ d_B = a + bL \end{cases}$$

$a = d_A$

$b = \frac{d_B - d_A}{L}$

$$d(x) = d_A + \frac{d_B - d_A}{L} x$$

2

22- Exprimer le pseudo moment quadratique polaire  $J(x)$  de la section courante de centre G en fonction de  $d(x)$  et  $e$ .

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{4A^2(x)}{\int_{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma}{e}} \\ &= \frac{4eA^2(x)}{\Gamma(x)} \\ &= \frac{4e\pi^2 d^4(x)}{16\pi d(x)} \end{aligned}$$

avec  $A(x) = \frac{\pi d^2(x)}{4}$

$e = \text{cte}$

$$\int_{\Gamma(x)} d\Gamma = \Gamma(x)$$

$\Gamma(x) = \pi d(x)$

$$J(x) = \frac{e\pi d^3(x)}{4}$$

2

23- Calculer la rotation de la section de centre B par rapport à la section de centre A notée  $\vec{\Omega}_{B/A} = \vec{\Omega}_B - \vec{\Omega}_A$ .

On utilisera la 1<sup>o</sup> formule de Bresse.

$$\vec{\Omega}_B = \vec{\Omega}_A + \int_{\vec{AB}} d\vec{\Omega}$$

$$\vec{\Omega}_{B/A} = \int_{\vec{AB}} d\vec{\Omega} \quad \text{avec: } d\vec{\Omega} = \frac{M_t}{GJ} d\Delta \vec{X}$$

$$= \int_0^L \frac{C}{GJ(x)} \vec{X} dx \quad \text{avec: } J(x) = \frac{e\pi d^3(x)}{4}$$

$$= \frac{4C}{e\pi G} \vec{X} \int_0^L \frac{dx}{d^3(x)} \quad \text{avec: } d(x) = a + bx$$

$$= \frac{4C}{e\pi G} \vec{X} \left[ -\frac{1}{2b} \frac{1}{(a+bx)^2} \right]_0^L$$

$$= -\frac{1}{2b} \frac{4C}{e\pi G} \left[ \frac{1}{(a+bL)^2} - \frac{1}{a^2} \right] \vec{X}$$

$$\rightarrow = -\frac{2C}{e\pi G} \frac{L}{d_B - d_A} \left[ \frac{1}{d_B^2} - \frac{1}{d_A^2} \right] \vec{X}$$

$$\vec{\Omega}_{B/A} = \frac{2CL}{e\pi G} \frac{d_B + d_A}{d_B^2 d_A^2} \vec{X}$$

4

3- Etude des contraintes

31- Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans le tube

$$\bar{\sigma} = \frac{M_t}{2eA} \quad M_t = C \quad e = \frac{d_A}{2}$$

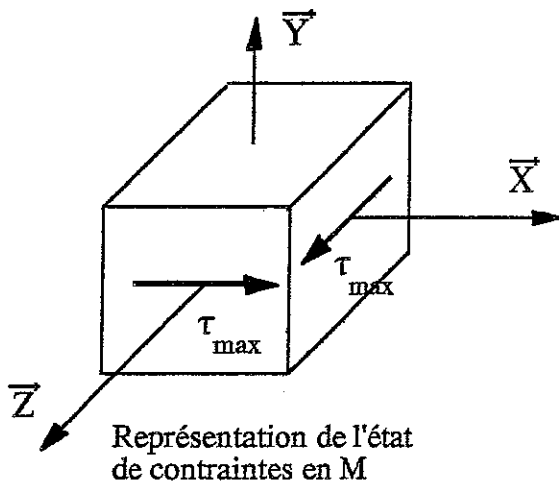
$$\bar{\sigma}_{\max} = \frac{M_t}{2eA_{\min}}$$

$A_{\min} = A(d_A)$  section de  
carré A

$$\tau_{\max} = \frac{2C}{e\pi d_A^2}$$

1

32- Calculer les contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$



$$C(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\sigma}_{\max} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_{\max} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

Matrice des contraintes en M  
en fonction de  $\tau_{\max}$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \bar{\sigma}_{\max} \\ 0 & -\sigma & 0 \\ \bar{\sigma}_{\max} & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma \begin{vmatrix} -\sigma & \bar{\sigma}_{\max} \\ \bar{\sigma}_{\max} & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma (\sigma^2 - \bar{\sigma}_{\max}^2) = 0$$

$$\sigma (\sigma - \bar{\sigma}_{\max})(\sigma + \bar{\sigma}_{\max}) = 0$$

Expressions en fonction de  $\tau_{\max}$

1

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_{\max}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\bar{\sigma}_{\max}$$

1

1

33- Calculer la contrainte équivalente à l'aide du critère de Von-Mises

$$\sigma_{\text{équi. VM}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

$$\rightarrow = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \tau_{\text{max}}^2 + \tau_{\text{max}}^2 + (2\tau_{\text{max}})^2 \right]}$$

$$\sigma_{\text{équi}} = \sqrt{3} \tau_{\text{max}} \quad \boxed{2}$$

4- Application numérique

On donne :  $L = 2\text{m}$ ,  $e = 3\text{ mm}$ ,  $d_A = 150\text{ mm}$ ,  $d_B = 220\text{ mm}$ ,  $C = 8\text{ kN.m}$

$G = 80\text{ GPa}$  et  $\sigma_e = 320\text{ MPa}$

41- Calculer  $\Omega_{B/A}$

$$\Omega_{B/A} = \frac{2CL}{e\pi G} \frac{d_B + d_A}{d_B^2 d_A^2}$$

$$= \frac{2 \times 8 \times 10^3 \times 2}{3 \times 10^{-3} \times \pi \times 80 \times 10^3} \frac{270 \times 10^{-3}}{150^2 \times 220^2 \times 10^{-12}}$$

$$\Omega_{B/A} = 0,8 \quad \boxed{1}$$

42- Calculer  $\tau_{\text{max}}$  et  $\sigma_{\text{équi}}$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{2C}{e\pi d_A^2} = \frac{2 \times 8 \times 10^3}{3 \times 10^{-3} \times \pi \times 0,15^2}$$

$$\sigma_{\text{équi}} = \sqrt{3} \tau_{\text{max}}$$

$$\tau_{\text{max}} = 75,4 \text{ MPa} \quad \boxed{1}$$

$$\sigma_{\text{équi}} = 130,7 \text{ MPa} \quad \boxed{1}$$

43- En déduire le coefficient de sécurité du tube

$$n_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équi}}} = \frac{320}{130,7}$$

$$n_e = 2,4 \quad \boxed{1}$$