utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Date : Mardi 24 Juin 2008

U.V : MQ 22 — Semestre : AUTOMNE ☐ PRINTEMPS ■

Examen : Médian ☐ Final ■

NOM : ________ Prénom : ________ Né(e) le : ________

DEPARTEMENT : ________

NIVEAU : ________ FILIERE : ________

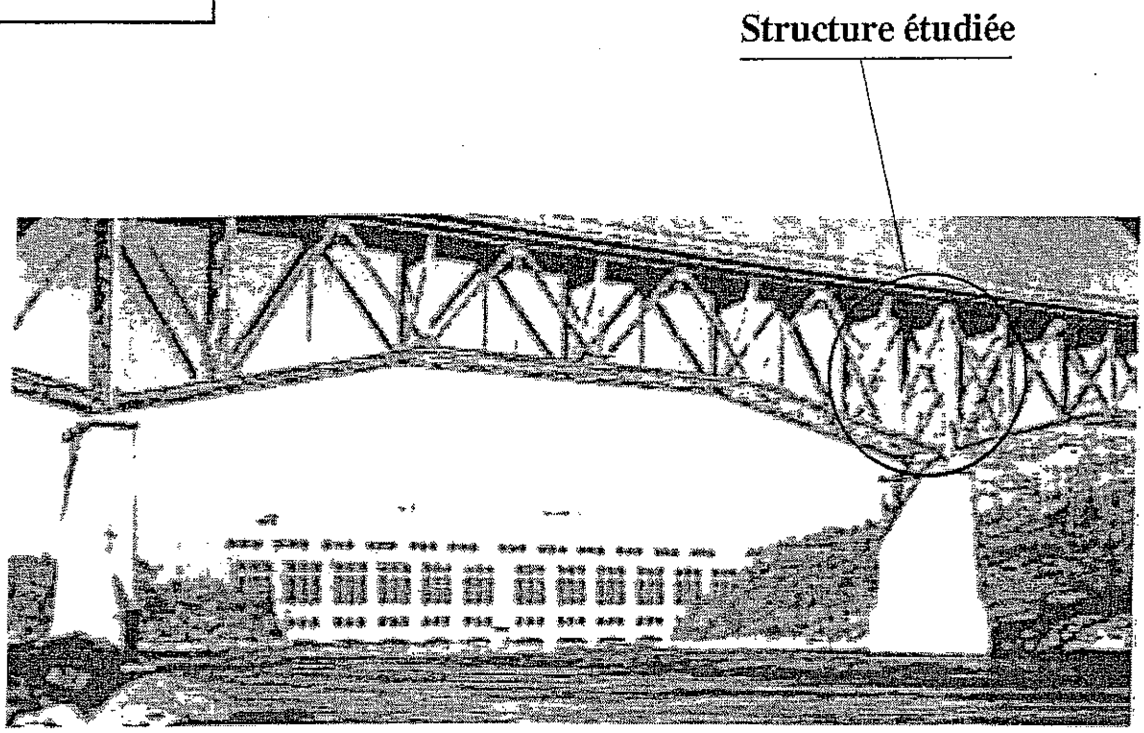
Le sujet se compose de 3 exercices totalement indépendants.

Signature :

Durée de l'épreuve : 2 heures
Formulaire personnel format (A4-RV) autorisé
Calculatrice autorisée

N'omettez pas de signer votre copie

Exercice n°1



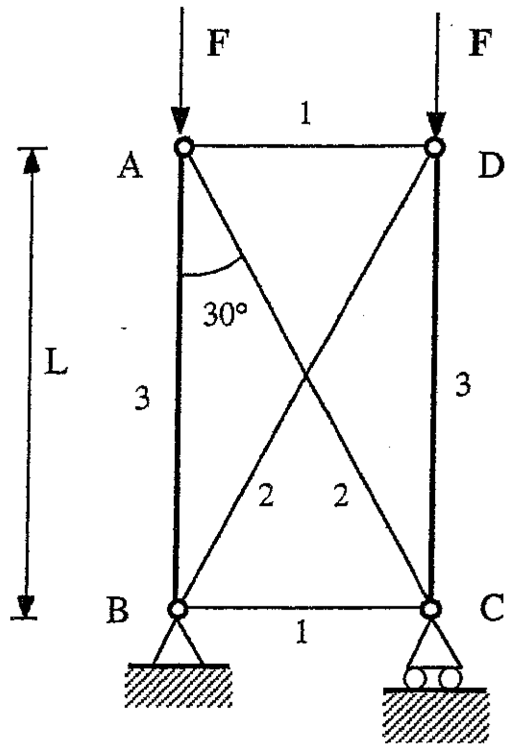
On considère le treillis plan hyperstatique parfaitement articulé représenté ci-contre.

Les barres (1) et (2) ont la même section s et les barres (3) ont pour section S.

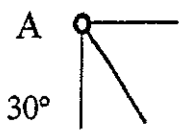
Les barres (3) ont pour longueur L.
On note E le module de Young du matériau.

On néglige le poids propre des barres devant le chargement appliqué.

On note N_i les efforts normaux dans les barres avec $N_i > 0$ (traction) et $N_i < 0$ (compression).



1- Représenter les actions des barres sur le noeud A et écrire les équations d'équilibre de ce noeud.



$= 0$
$= 0$

0,5 | 0,5 | 0,5

2- Donner l'expression des efforts N_1 et N_3 en fonction des efforts N_2 et F.

$N_1 =$	$N_3 =$

0,5 | 0,5

3- Calculer la longueur des barres 1 et 2.

$L_1 =$ L	$L_2 =$ L

0,5 | 0,5

4- Energie de déformation élastique U.

41- Expression de U en fonction des N_i.

$$U = \frac{L}{E}\left[\qquad \right]$$

1,5

42- Expression de U en fonction de N_2 et de F.

$$U = \frac{L}{E}\left[\qquad \right]$$

1,5

(sans développer les expressions de N_1 et de N_3 calculées à la question précédente)

5- Calculer l'inconnue hyperstatique N_2.

Théorème utilisé : | | Expression : | | 0,5 0,5

$N_2 =$ ———— F | 1,5

6- Valeur des efforts N_1 et N_3.

$N_1 =$ ———— F | $N_3 =$ ———— F | 0,5 0,5

7- Calculer la contrainte σ_i dans chacune des barres du treillis.

	$\sigma_1 =$ ——— F	0,5
$\sigma_2 =$ ——— F	$\sigma_3 =$ ——— F	0,5 / 0,5

8- Calculer, avec le critère de Tresca, la contrainte équivalente $\sigma_{\text{équi } i}$ dans chacune des barres du treillis.

	$\sigma_{\text{équi } 1} =$ ——— F	0,5
$\sigma_{\text{équi } 2} =$ ——— F	$\sigma_{\text{équi } 3} =$ ——— F	0,5 / 0,5

9- En déduire l'expression de la section s des barres (1) et (2).
On note : σ_e la limite élastique du matériau à la traction,
n_e le coefficient de sécurité à la limite élastique.

s =	1

10- Application numérique.

On prendra : $F = 1\,200$ kN, $L = 12$ m, $s = 28{,}9$ cm^2, $S = 71{,}4$ cm^2,
$\sigma_e = 240$ MPa et $E = 210$ GPa

Calculer les efforts et les contraintes dans les barres.

0,5

0,5

$N_1 =$ kN	$N_2 =$ kN	$N_3 =$ kN	0,5
			0,5
			0,5
$\sigma_1 =$ MPa	$\sigma_2 =$ MPa	$\sigma_3 =$ MPa	0,5

Calculer l'énergie de déformation élastique U.

$U =$ F^2	$U =$ Joules	0,5
		0,5

11- Calculer le déplacement vertical v_A du point A.

Théorème utilisé : Expression : 0,5

0,5

$v_A =$ mm 0,5

12- Calculer le coefficient de sécurité n_e à la limite élastique de la stucture.

$n_e =$ 0,5

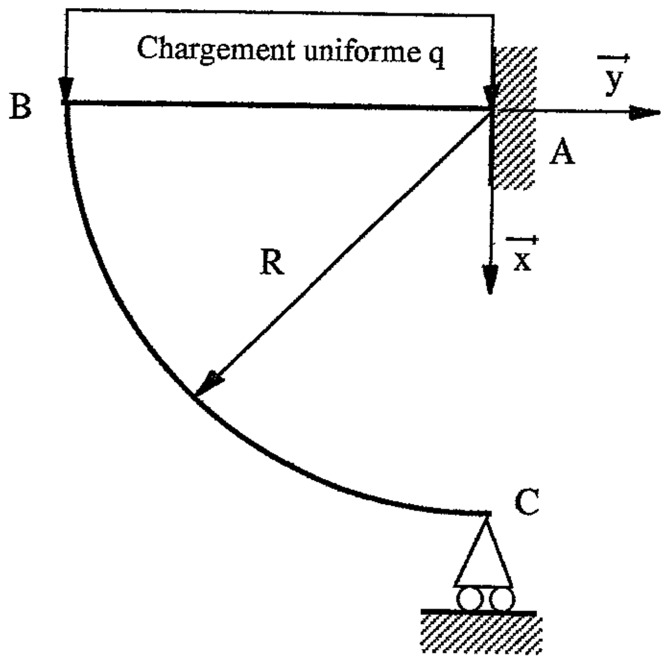
Exercice n°2

On considère la structure plane représenté ci-dessous.
Elle est constituée d'un poutre droite (AB) et d'une poutre courbe (BC).

- la poutre (AB) de ligne moyenne rectiligne de longueur R parfaitement encastrée en A avec le bâti fixe,
- la poutre (BC) de ligne moyenne un quart de cercle de rayon R parfaitement encastrée en A avec la poutre (AB) et en appui simple en C avec le bâti fixe.

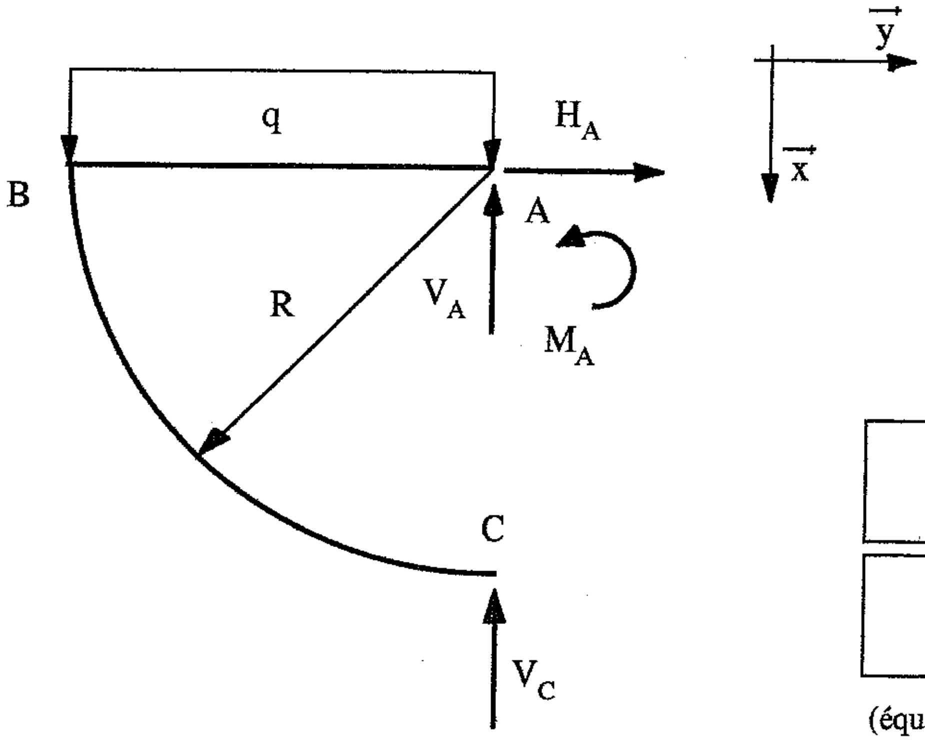
Le chargement est représenté par une répartition uniforme de charges q appliquées sur la partie rectiligne (AB) de la structure.

Le poids propre de la structure est négligeable devant le chargement appliqué.



1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème

11- Ecrire les trois équations d'équilibre de la structure (ABC).



$= 0$	0,5
$= 0$	0,5
$= 0$	1

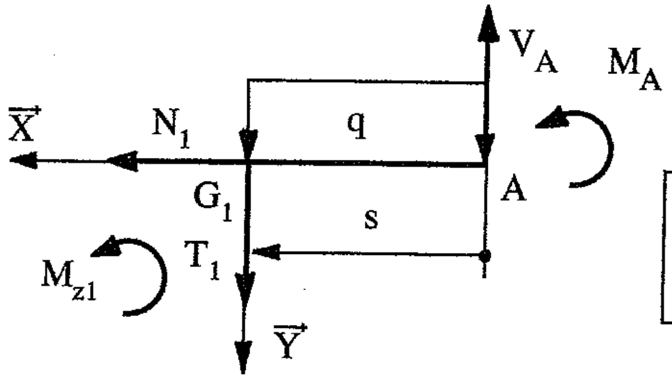
(équation de moment en A)

12- En déduire la valeur des composantes H_A et M_A et la relation liant les composantes V_C et V_A.
On décide de garder V_A comme **inconnue hyperstatique**

$H_A=$	0,5
$M_A=$	0,5
$V_C =$	0,5

2- Déterminer les expressions du moment de flexion M_Z en G (centre de la section droite du profilé).

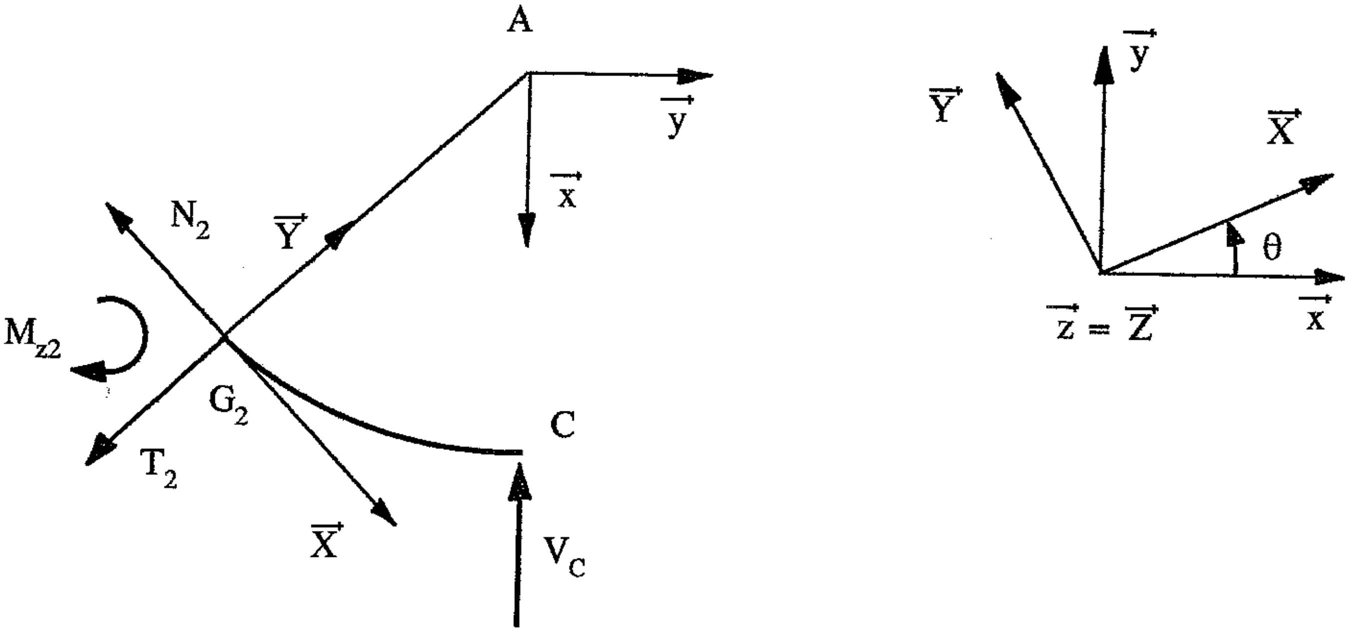
21- En G_1, tel que $\overrightarrow{AG}_1 = s\ \overrightarrow{X}$ ($0 \leq s \leq R$).



$M_{Z1} =$

2

12- En G_2, avec ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).



$M_{Z2} =$

4

3- Calcul de l'énergie de déformation élastique U de la structure
Ecrire, **sans développer le calcul des intégrales**, l'expression de l'énergie de déformation élastique U_{ABC} de la structure (ABC) calculée en fonction du moment de flexion M_z.
On note EI le module de rigidité à la flexion EI_{Gz} constant de la structure.

$U_{ABC} =$

2

4- Valeur de l'inconnue hyperstatique V_A.

Théorème utilisé : | | Expression : | | 0,5

0,5

Inconnue hyperstatique V_A :

(Valeur approchée)

$V_A =$	$V_A =$	3
		0,5

(Valeur exacte)

5- Calcul des déplacements.

51- Rappeler les expressions du moment fléchissant M_z

On notera : $\mathbf{V_A} = \alpha\ \mathbf{qR}$

$M_{z1} =$

$M_{z2} =$

52- Calculer le déplacement $\overrightarrow{\Delta B}$ de la section de centre B par la 2° formule de Bresse

(En fonction de α)	(On remplaçant α)	
$\Delta B_x =$	$\Delta B_x =$	4 1

6- On retient pour la structure un profilé de type IPE.

61- Déterminer le moment quadratique I_{GZ} du profilé.
On donne :
$E = 2{,}1.10^{11}$ Pa, $q = 3500$ N/m, $\Delta B_{x\ maxi} = 6$ mm, $R = 2$ m et $\sigma_e = 320$ MPa

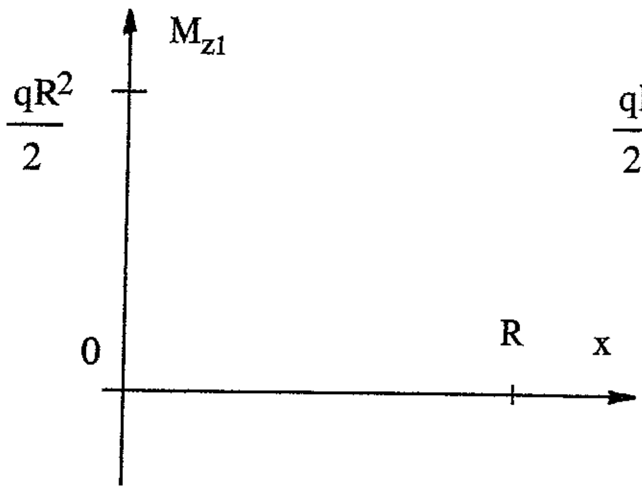
$I_{GZ} =$ cm^4 | 1

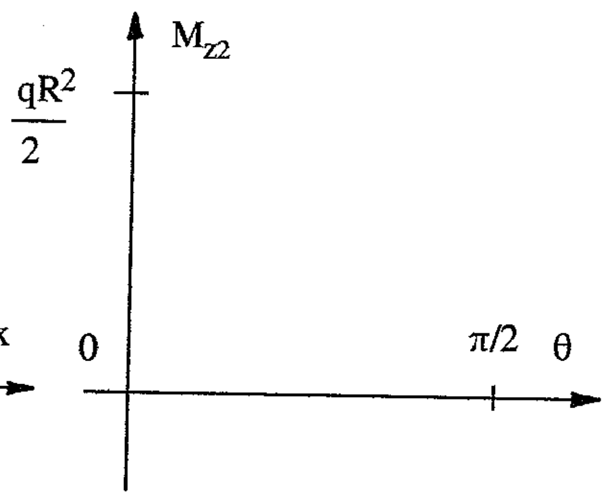
62- A l'aide du tableau page 14, déterminer le profilé retenu

IPE : | 1

7- Tracer le diagramme du moment de flexion M_z entre A et B et entre B et C

$M_{z1} =$	$M_{z2} =$





1

1

8- Déterminer la section la plus sollicitée.

Section de centre :

1

9- Calculer la contrainte normale maximale σ_{max}.

$\sigma_{max} =$ MPa

1

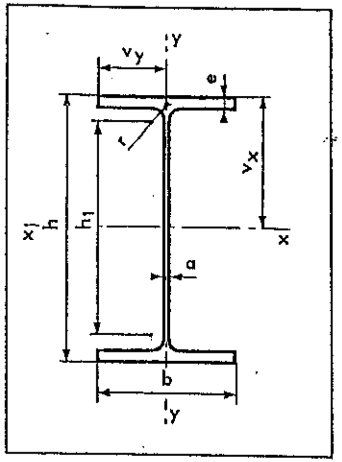
10- En déduire le coefficient de sécurité n_e de la structure.

$n_e =$

1

POUTRELLES IPE

Norme de référence :
NF A 45-205 (août 1962).



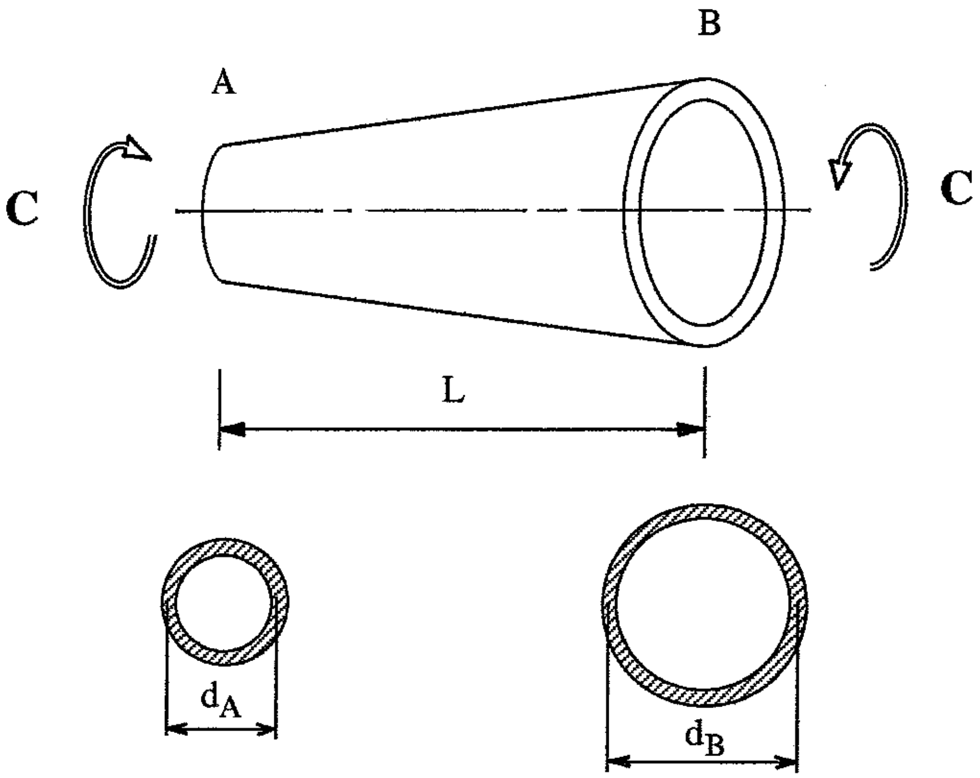
Profils	Dimensions						Masse par mètre P	Section A	Surface de peinture		Profils	Caractéristiques rapportées à l'axe neutre									Moment d'inertie de torsion J	Module de raideur d
	h	b	a	e	r	Partie droite de l'âme h_1						I_x	$\frac{I_x}{v_x}$	i_x	Moment statique S	Distance des centres	η_x	I_y	$\frac{I_y}{v_y}$	i_y		
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	cm²	m²/m	m²/t		cm⁴	cm³	cm	cm³	cm		cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm
80	80	46	3,8	5,2	5	60	6,0	7,64	0,329	54,8	**80**	80,1	20,0	3,24	11,6	6,9	3,33	8,49	3,69	1,05	0,70	0,299
100	100	55	4,1	5,7	7	75	8,1	10,3	0,401	49,5	**100**	171	34,2	4,07	19,7	8,7	4,22	15,9	5,79	1,24	1,10	0,313
120	120	64	4,4	6,3	7	93	10,4	13,2	0,474	45,6	**120**	318	53,0	4,90	30,4	10,5	5,10	27,7	8,65	1,45	1,71	0,336
140	140	73	4,7	6,9	7	112	12,9	16,4	0,550	42,6	**140**	541	77,3	5,74	44,2	12,2	5,99	44,9	12,3	1,65	2,54	0,359
160	160	82	5,0	7,4	9	127	15,8	20,1	0,622	39,4	**160**	869	109	6,58	61,9	14,0	6,90	68,3	16,7	1,84	3,53	0,379
180	180	91	5,3	8,0	9	146	18,8	23,9	0,698	37,1	**180**	1 317	146	7,42	83,2	15,9	7,76	101	22,2	2,05	4,90	0,404
200	200	100	5,6	8,5	12	159	22,4	28,5	0,768	34,3	**200**	1 943	194	8,26	110	17,6	8,66	142	28,5	2,24	6,46	0,425
220	220	110	5,9	9,2	12	178	26,2	33,4	0,848	32,4	**220**	2 772	252	9,11	143	19,4	9,62	205	37,3	2,48	8,86	0,460
240	240	120	6,2	9,8	15	190	30,7	39,1	0,921	30,0	**240**	3 892	324	9,97	183	21,2	10,55	284	47,3	2,69	11,60	0,490
270	270	135	6,6	10,2	15	220	36,1	45,9	1,04	28,8	**270**	5 790	429	11,2	239	24,2	11,88	420	62,2	3,02	14,93	0,510
300	300	150	7,1	10,7	15	249	42,2	53,8	1,16	27,5	**300**	8 356	557	12,5	314	26,6	13,20	604	80,5	3,35	19,47	0,535
330	330	160	7,5	11,5	18	271	49,1	62,6	1,25	25,5	**330**	11 770	713	13,7	402	29,3	14,52	788	98,5	3,55	25,70	0,558
360	360	170	8,0	12,7	18	299	57,1	72,7	1,35	23,6	**360**	16 270	904	15,0	510	31,9	15,83	1 043	123	3,79	36,20	0,600
400	400	180	8,6	13,5	21	331	66,3	84,5	1,47	22,2	**400**	23 130	1 160	16,5	654	35,4	17,50	1 318	146	3,95	46,80	0,607
450	450	190	9,4	14,6	21	379	77,6	98,8	1,61	20,7	**450**	33 740	1 500	18,5	849	39,7	19,33	1 676	176	4,12	63,80	0,616
500	500	200	10,2	16,0	21	426	90,7	116	1,74	19,2	**500**	48 200	1 930	20,4	1 100	43,9	21,28	2 142	214	4,31	89,00	0,640
550	550	210	11,1	17,2	24	468	106	134	1,88	17,7	**550**	67 120	2 440	22,3	1 390	48,2	23,02	2 668	254	4,45	118,4	0,657
600	600	220	12,0	19,0	24	514	122	156	2,02	16,6	**600**	92 080	3 070	24,3	1 760	52,4	25,16	3 387	308	4,66	166,2	0,697

Exercice n°3

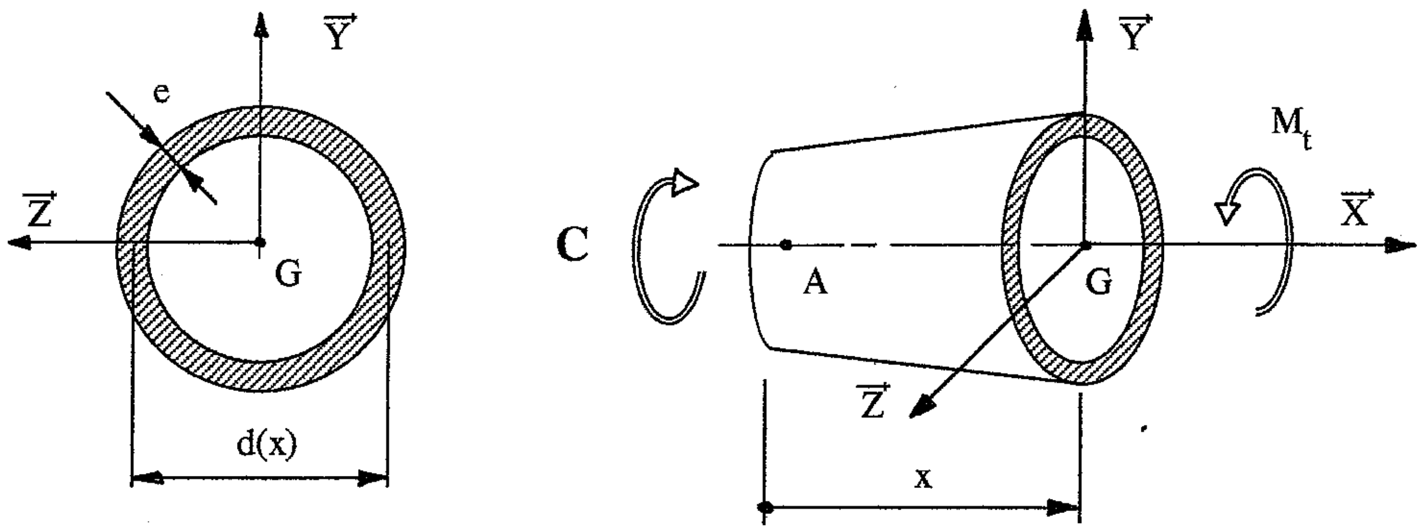
On considère un **tube mince** conique (AB) de section circulaire, de longueur L, d'épaisseur e constante, de diamètres moyens d_A et d_B à ses extrémités A et B.

Le chargement est représenté par deux couples C égaux et opposés appliqués aux extrémités A et B.

Le poids propre du tube est négligeable devant le chargement appliqué.



1- Déterminer le moment de torsion M_t en G (centre de la section droite du tube).



$M_t =$

1

2- Déterminer la rotation de la section de centre B par rapport à la section de centre A.

21- Exprimer le diamètre moyen d(x) de la section courante de centre G en fonction de d_A, d_B et x.

d(x) =

2

22- Exprimer le pseudo moment quadratique polaire J(x) de la section courante de centre G en fonction de d(x) et e.

J(x) =

2

23- Calculer la rotation de la section de centre B par rapport à la section de centre A notée $\overrightarrow{\Omega}_{B/A} = \overrightarrow{\Omega}_B - \overrightarrow{\Omega}_A$.

On utilisera la 1° formule de Bresse.

$\overrightarrow{\Omega}_{B/A}=$

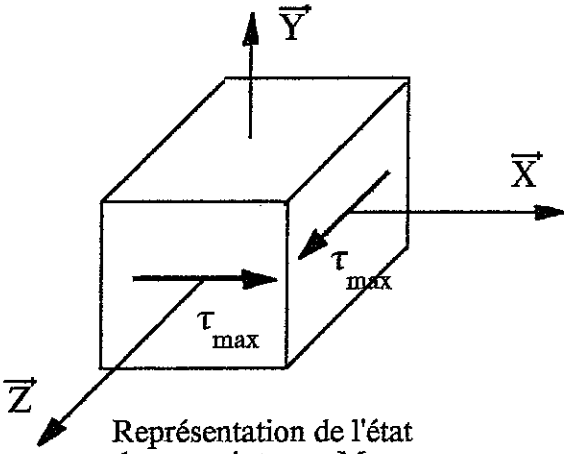
4

3- Etude des contraintes

31- Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans le tube

$\tau_{max} =$	1

32- Calculer les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3



Représentation de l'état de contraintes en M

C(M) =	1

Matrice des contraintes en M en fonction de τ_{max}

Expressions en fonction de τ_{max} 1

$\sigma_1 =$	$\sigma_2 =$	$\sigma_3 =$	1 / 1

33- Calculer la contrainte équivalente à l'aide du critère de Von-Mises

$\sigma_{équi} =$	2

4- Application numérique

On donne : $L = 2m$, $e = 3$ mm, $d_A = 150$ mm, $d_B = 220$ mm, $C = 8$ kN.m

$G = 80$ GPa et $\sigma_e = 320$ MPa

41- Calculer $\Omega_{B/A}$

$\Omega_{B/A} =$ °	1

42- Calculer τ_{max} et $\sigma_{équi}$.

$\tau_{max} =$ MPa	$\sigma_{équi} =$ MPa	1 1

43- En déduire le coefficient de sécurité du tube

$n_e =$	1