

UV : **MQ22**

Semestre : AUTOMNE

PRINTEMPS

EXAMEN : **MEDIAN**

FINAL

NOM :

Prénom :

Né(e) le :

DEPARTEMENT :

NIVEAU :

FILIERE :

Le sujet est composé de 3 exercices totalement indépendants.



Grande Bretagne : Stade de Wembley

Signature :

Feuille A4 manuscrite
Calculatrice autorisée

Exercice n°1

On considère le treillis plan isostatique représenté ci-dessous. On note E le module d'Young du matériau des barres.

Les barres 1, 5 et 7 ont pour section $2S$, les barres 2, 3, 4 et 6 ont pour section S .

Les liaisons avec le bâtiment sont :

- une articulation en A,
- un appui simple en B.

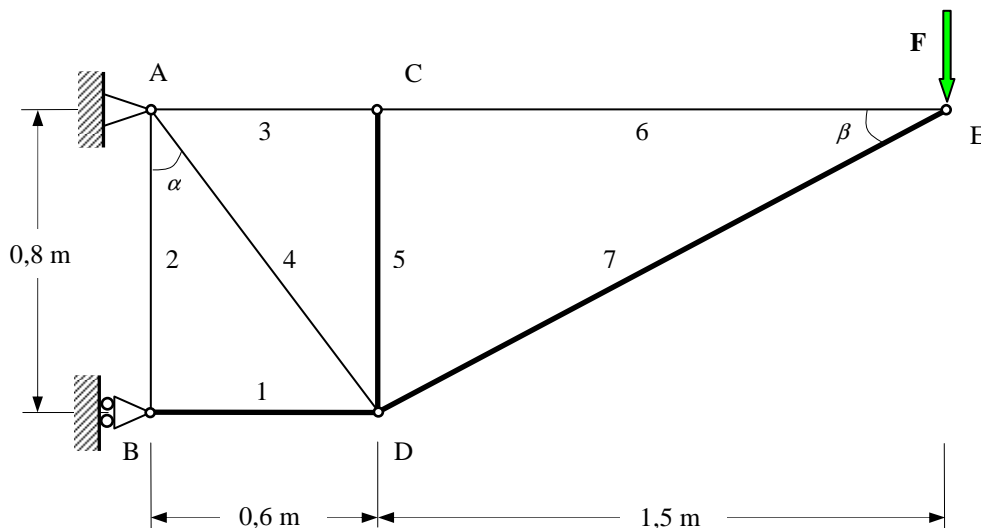
Le chargement est représenté par une charge F appliquée au nœud E.

Hypothèses retenues :

- les articulations sont sans frottement,
- le poids propre des barres est négligeable devant le chargement appliqué,
- on note N_i les efforts normaux dans les barres avec :
 $N_i > 0$ (traction) $N_i < 0$ (compression)

On se propose de déterminer le déplacement vertical du nœud C par le théorème de Castigliano.

Il convient alors d'appliquer au nœud C une charge fictive P dans la direction du déplacement recherché.



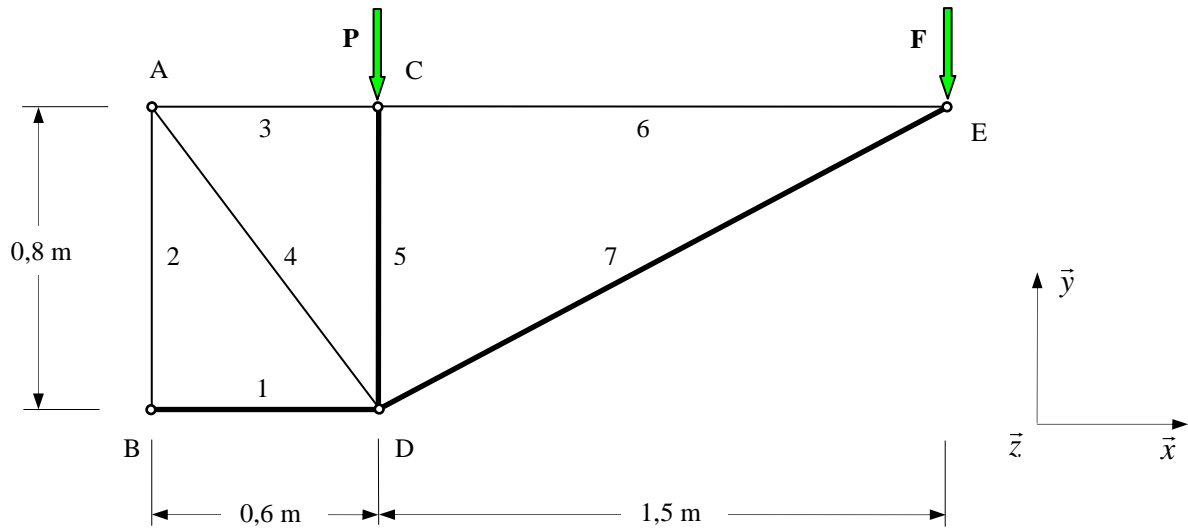
1- Calculer les actions de liaison avec le bâtiment en A et en B.

On notera :

$$\{\text{Bâtiment} \rightarrow \text{treillis}\}_B = \{X_B \vec{x}; \vec{0}\} \text{ et } \{\text{Bâtiment} \rightarrow \text{treillis}\}_A = \{X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}; \vec{0}\}$$

Ecrire les trois équations d'équilibre du treillis.

On écrira l'équation de moment au point A.



$X_A =$	$X_B =$
$Y_A =$	

2- Représenter les actions des barres sur les nœuds et écrire les équations d'équilibre des nœuds. **On ne remplacera pas** X_A , Y_A et X_B par leur valeur trouvée à la question précédente.

21 - Nœud E : Exprimer N_6 et N_7

$\tan \beta =$	$\sin \beta =$	$\cos \beta =$
----------------	----------------	----------------

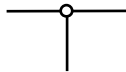
(voir page 2)



$N_6 =$

$N_7 =$

22 - Nœud C : Exprimer N_3 et N_5



$N_3 =$

$N_5 =$

21- Nœud B : Exprimer N_1 et N_2



$N_1 =$

$N_2 =$

22- Nœud A : Exprimer N_4

$\tan \alpha =$	$\sin \alpha =$	$\cos \alpha =$
-----------------	-----------------	-----------------

(voir page 2)



$N_4 =$

25 – Calculer les efforts N_i dans les barres en fonction de F et de P

$N_1 = -\frac{3}{4}\left(P + \frac{7}{2}F\right)$	$N_2 = 0$	$N_3 = \frac{15}{8}F$	$N_4 = \frac{5}{4}(P + F)$
$N_5 = -P$	$N_6 = \frac{15}{8}F$	$N_7 = -\frac{17}{8}F$	

3- Energie de déformation élastique U du treillis.

Exprimer U en fonction des efforts dans les barres $N_i(F, P)$, sans les remplacer par leur valeur.

$$U = \frac{1}{4ES} \left[\phantom{\hspace{10em}} \right]$$

4- Calcul du déplacement vertical v_C du noeud C par le théorème de Castigliano

Expression :	$v_C =$
--------------	---------

$$v_c = \frac{F}{ES}$$

5- Calcul du coefficient de sécurité du treillis

51- Calculer la contrainte équivalente maximale $\sigma_{\text{équi. maxi}}$

On utilisera le critère de TRESCA

Rappeler l'expression des efforts dans les barres en fonction de F

$N_1 =$	F	$N_2 =$	F	$N_3 =$	F
$N_4 =$	F	$N_5 =$	F	$N_6 =$	F
$N_7 =$	F				

$$\sigma_{\text{équi. maxi}} =$$

52- En déduire l'expression du coefficient de sécurité n_e du treillis

On note : σ_e la limite élastique du matériau

$$n_e =$$

6- Application numérique

Les barres de section S sont des tubes ronds de diamètre extérieur D_e et d'épaisseur e .

On donne :

$F = 30 \text{ kN}$, $E = 73 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$, $D_e = 80 \text{ mm}$ et $e = 2 \text{ mm}$.

61- Calculer l'aire S de la section droite de ces tubes

$S =$	mm^2
-------	---------------

62- Calculer le déplacement v_c du point C

$v_c =$	mm
---------	-------------

63- Calculer la contrainte équivalente maximale $\sigma_{\text{équi. maxi}}$

$\sigma_{\text{équi. maxi}} =$	MPa
--------------------------------	--------------

64- Calculer le coefficient de sécurité n_e

$n_e =$

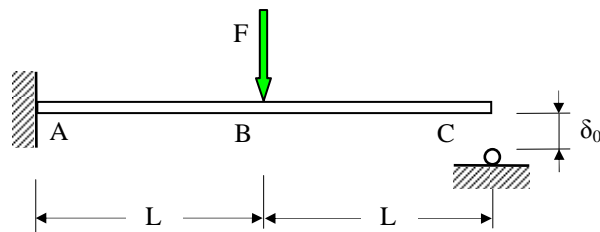
Exercice n°2

Une poutre droite de longueur $2L$ est parfaitement encadrée avec un bâti fixe en A. Elle supporte un charge concentrée F en son milieu B.

Un appui simple est installé à son extrémité C. Une erreur dans la mise en place de celui-ci conduit à un défaut d'alignement δ_0 par rapport à la liaison encastrement.

On ne retient pour les calculs que le seul moment fléchissant M_z .

La poutre a un module de rigidité à la flexion EI_{GZ} constant qui sera noté EI .



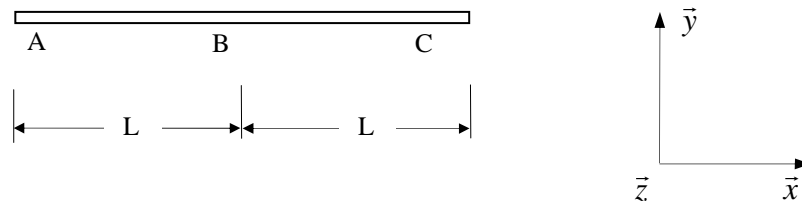
(dessin sans échelle)

1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème.

Nous faisons l'hypothèse que l'intensité de l'effort F est suffisante pour que l'extrémité C de la poutre déformée vienne en contact avec l'appui simple.

11- Compléter le schéma de la poutre, traduisant son équilibre

$$\{B\hat{a}t\ i \rightarrow P\ o\ u\ t\ r\ e\} =_A \{X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} ; \vec{M}_A \vec{z}\} \text{ et } \{B\hat{a}t\ i \rightarrow P\ o\ u\ t\ r\ e\} =_C \{Y_C \vec{y} ; \vec{0}\}$$



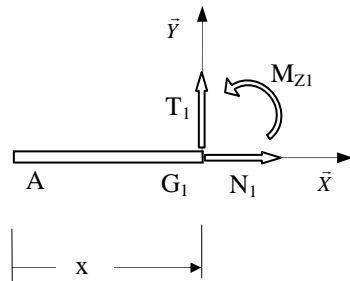
12- Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre

= 0	= 0	= 0
-----	-----	-----

13- On décide de garder M_A comme inconnue hyperstatique
Exprimer les composantes Y_A et Y_C en fonction de M_A et de F

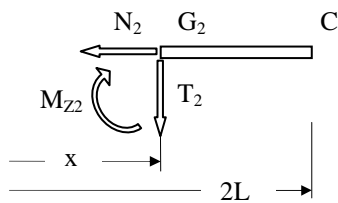
$Y_A =$	$Y_C =$
---------	---------

- 2- Déterminer l'expression du moment de flexion M_Z dans la poutre
- 21- Déterminer, en fonction de M_A , F , x et L l'expression du moment de flexion M_{Z1} en G_1 (centre de la section droite du profilé de la poutre entre A et B) $\overrightarrow{AG_1} = x\vec{X}$ ($0 \leq x \leq L$)



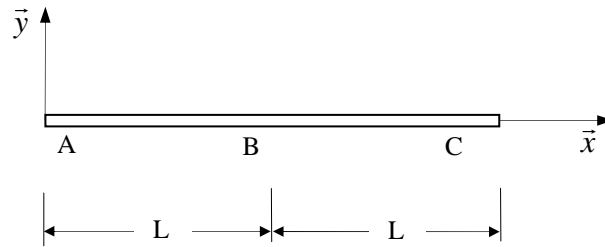
$M_{Z1} =$

- 22- Déterminer, en fonction de M_A , F , x et L l'expression du moment de flexion M_{Z2} en G_2 (centre de la section droite du profilé de la poutre entre B et C) $\overrightarrow{AG_2} = x\vec{X}$ ($L \leq x \leq 2L$). On isole le tronçon G_2C .



$M_{Z2} =$

- 3- Equation de la déformée $y(x)$ de la ligne moyenne de la poutre (ABC)
On choisit $[A;(\vec{x}, \vec{y})]$ comme repère de calcul



- 31- Equation de la déformée $y_1(x)$ de la ligne moyenne entre A et B
On notera C_1 et C_2 les deux constantes d'intégration

$$EI y_1'' = M_{z1}$$

$$EI y_1'' =$$

$$EI y_1' =$$

$$EI y_1 =$$

- 32- Equation de la déformée $y_2(x)$ de la ligne moyenne entre B et C
On notera C_3 et C_4 les deux constantes d'intégration

$$EI y_2'' = M_{z2}$$

$$EI y_2'' =$$

$$EI y_2' =$$

$$EI y_2 =$$

33- Calcul des quatre constantes d'intégration C_1, C_2, C_3, C_4 et du moment M_A

a) Conditions aux limites

Exprimer les 5 conditions aux limites que doit satisfaire la déformée de la ligne moyenne de la poutre

Au point A :

- pente (CL 1) :
- flèche (CL 2) :

Au point B :

- pente (CL 3) :
- flèche (CL 4) :

Au point C :

- flèche (CL 5) :

b) Expression des quatre constantes et du moment M_A

Expliciter les conditions aux limites et en déduire

- (CL 1) : en déduire C_1

$C_1 =$

- (CL 2) : en déduire C_2

$C_2 =$

○ (CL 3) :

$$M_A =$$

○ (CL 4) : (équation E3)

$$= 0$$

○ (CL 5) : (équation E4)

$$= 0$$

○ Remplacer, dans l'équation E3, M_A par son expression issue de (CL3)

$$= 0$$

- Résoudre le système des deux équations E4 et E3 : en déduire l'expression des deux constantes C_3 et C_4

$$C_3 = \frac{1}{4L} \left[-3EI\delta_0 + \frac{FL^3}{2} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{2} \left[EI\delta_0 - \frac{FL^2}{2} \right]$$

- En déduire l'expression de M_A

$$M_A = \frac{3}{4} \left[\frac{FL}{2} + \frac{EI\delta_0}{L^2} \right]$$

4- Application numérique

Le profilé est un tube rectangulaire en aluminium de hauteur h , de largeur b et d'épaisseur e (voir figure page 16).

On donne : $L = 2 \text{ m}$, $h = 150 \text{ mm}$, $b = 50 \text{ mm}$, $e = 4 \text{ mm}$, $I = 404 \text{ cm}^4$

$E = 73 \text{ GPa}$, $F = 5 \text{ kN}$ et $\delta_0 = 15 \text{ mm}$

Calculer les composantes des actions de liaison en A et en C

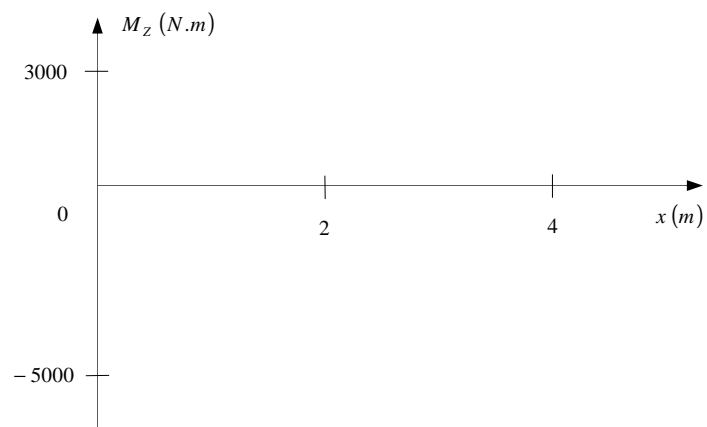
$$M_A = \quad \quad \quad \text{N.m}$$

$$Y_A = \quad N$$

$$Y_C = \quad N$$

5- Etude des contraintes

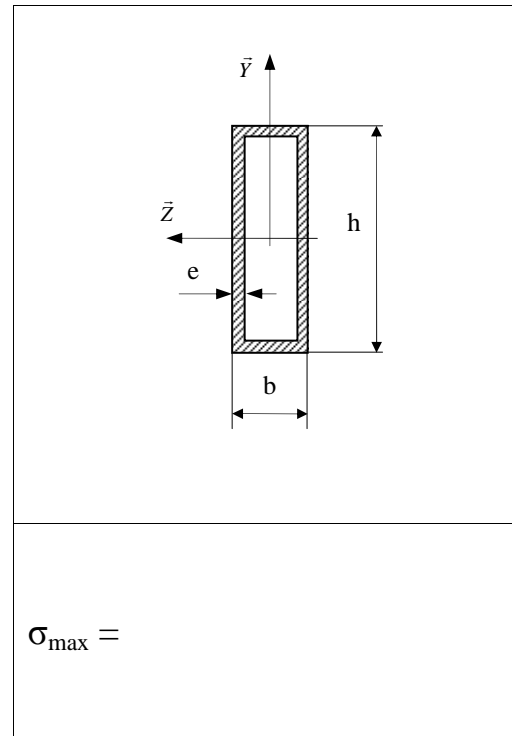
51- Tracer le diagramme du moment de flexion M_Z



52- En déduire la section la plus sollicitée de la poutre

Section de centre :

- 53- Donner l'expression de la contrainte normale maximale σ_{\max} .
Indiquer sur la figure ci-dessous le ou les points qui supportent σ_{\max} .



- 6- Application numérique.

On donne : $L = 2 \text{ m}$, $h = 150 \text{ mm}$, $b = 50 \text{ mm}$, $e = 4 \text{ mm}$, $I = 404 \text{ cm}^4$
 $E = 73 \text{ GPa}$, $F = 5 \text{ kN}$, $\delta_0 = 15 \text{ mm}$ et $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$

- 61- Calculer la contrainte maximale σ_{\max} .

$\sigma_{\max} =$	MPa
-------------------	-----

- 62- Calculer le coefficient de sécurité n_e de la poutre

$n_e =$

Exercice n°3

Une entreprise fabrique des tubes ronds en aluminium, de rayon extérieur $r_e = a$ et de rayon intérieur $r_i = b$, par filage à chaud (figure 1).

Une fabrication défectueuse conduit à une excentricité e du cylindre intérieur par rapport au cylindre extérieur. L'épaisseur du tube qui n'est plus constante s'exprime sous la forme $t_2 = t_0 \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)$ (figure 2)

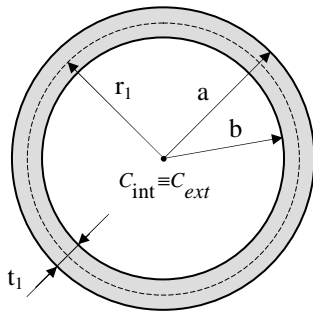


Figure 1
Tube T_1

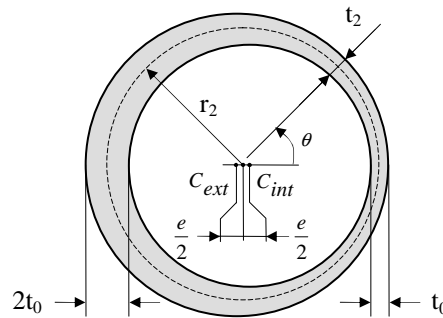


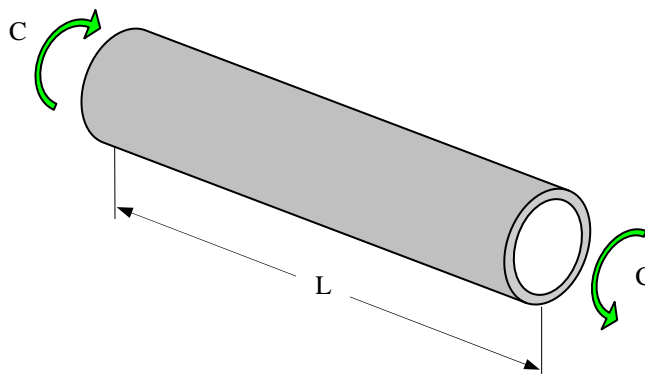
Figure 2
Tube T_2

a : rayon extérieur
 b : rayon intérieur
 r_1 : rayon de la ligne moyenne
 t_1 : épaisseur constante

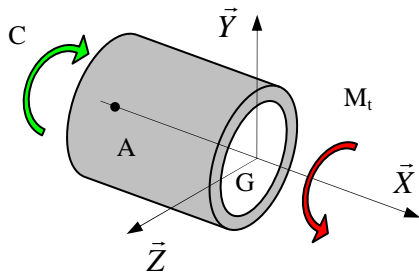
a : rayon extérieur
 b : rayon intérieur
 e : excentricité
 r_2 : rayon de la ligne moyenne
 t_2 : épaisseur variable
 t_0 : épaisseur mini

On se propose d'étudier l'influence du défaut de fabrication sur les contraintes et les déformations dans chacun des deux tubes. On utilisera la théorie approchée des tubes minces.

Les tubes T_1 et T_2 de longueur $AB = L$ sont sollicités à chacune de leurs extrémités A et B par deux couples C égaux et opposés.



1- Déterminer le moment de torsion M_t dans une section droite des tubes



$$M_t =$$

2- Déterminer le pseudo moment quadratique J de la section droite des tubes
 21- Déterminer le pseudo moment quadratique J_1 de la section du tube T_1 en fonction de r_1 et t_1

$$J_1 =$$

22- Déterminer le pseudo moment quadratique J_2 de la section du tube T_2 en fonction de r_2 et t_0

Rappel :
$$\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + cste$$

$$J_2 =$$

3- Déterminer la rotation de la section de centre B par rapport à la section de centre A notée $\alpha_{A,B} = \alpha$

31- Déterminer α_1 pour le tube T₁

$$\alpha_1 =$$

32- Déterminer α_2 pour le tube T₂

$$\alpha_2 =$$

33- Calculer le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} =$$

4- Etude des contraintes

- 41- Déterminer la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max 1}$ dans le tube T_1 en fonction de C , t_1 et r_1

$$\tau_{\max 1} =$$

- 42- Déterminer la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max 2}$ dans le tube T_2 en fonction de C , t_0 et r_2

$$\tau_{\max 2} =$$

- 43- Calculer le rapport $\frac{\tau_{\max 2}}{\tau_{\max 1}}$

$$\frac{\tau_{\max 2}}{\tau_{\max 1}} =$$

5- Calculs préliminaires

- 51- Exprimer r_1 en fonction de a et b

$$r_1 =$$

- 52- Exprimer t_0 en fonction de a , b et e

$$t_0 =$$

53- Exprimer r_2 en fonction de a et b

$r_2 =$

6- Application numérique

On donne : $a = 70$ mm, $b = 63,4$ mm, $e = 2,2$ mm, $L = 1$ m,
 $C = 21$ kN.m, $\sigma_e = 240$ MPa et $G = 27$ GPa

61- Calculer r_1

$r_1 =$ mm

62- Calculer r_2

$r_2 =$ mm

63- Calculer t_1

$t_1 =$ mm

64- Calculer t_0

$t_0 =$ mm

65- Calculer J_1

$J_1 =$ cm⁴

66- Calculer J_2

$J_2 =$ cm⁴

67- Calculer α_1

$\alpha_1 =$ rd

68- Calculer α_2

$\alpha_2 =$ rd

69- Calculer $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} =$$

70- Calculer $\tau_{\max 1}$

$$\tau_{\max 1} = \quad \text{MPa}$$

71- Calculer $\tau_{\max 2}$

$$\tau_{\max 2} = \quad \text{MPa}$$

72- Calculer $\frac{\tau_{\max 2}}{\tau_{\max 1}}$

$$\frac{\tau_{\max 2}}{\tau_{\max 1}} =$$