utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Date : Lundi 24 Juin 2013

UV : **MQ22** Semestre : AUTOMNE ☐ **PRINTEMPS** ☒

EXAMEN : MEDIAN ☐ **FINAL** ☒

NOM : Prénom : Né(e) le :

DEPARTEMENT :

NIVEAU : FILIERE :

Le sujet est composé de 3 exercices totalement indépendants.

TOUS LES RESULTATS SERONT JUSTIFIES

The Leonard P. Zakim Bunker Hill Bridge (Boston)

Signature :

Feuille A4 manuscrite
Calculatrice autorisée

UTBM_P2013_Final MQ22

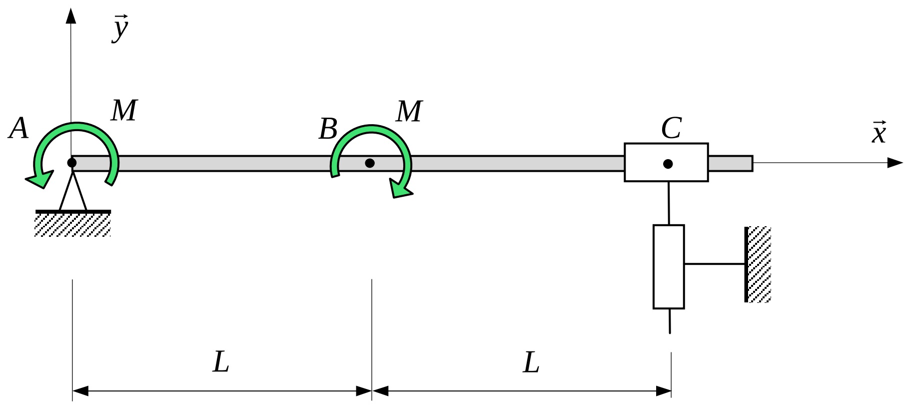
Exercice n°1

On considère la poutre droite *(ABC)* de longueur $2L$, en liaison pivot parfaite d'axe $(A;\vec{z})$ avec un bâti fixe et en liaison glissière parfaite de direction $(\vec{x})$ avec un coulisseau en *C*.
Le coulisseau est lui-même en liaison glissière parfaite de direction $(\vec{y})$ avec le bâti fixe.
La poutre *(ABC)* est sollicitée par deux couples de même intensité *M* mais de sens contraires en *A* et en *B*, milieu de la poutre.

On se propose de déterminer l'équation de la déformée de sa ligne moyenne

Le poids propre de la poutre *(ABC)* et du coulisseau est négligeable devant le chargement appliqué.

La modélisation retient un problème plan.

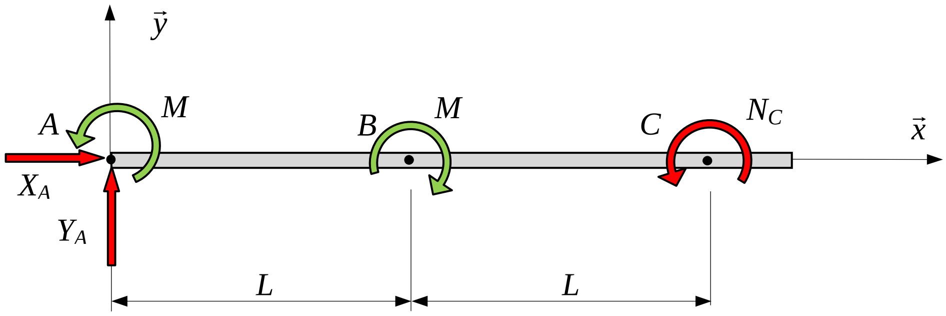


On ne retient pour les calculs que le seul moment de flexion M_Z.

1- Déterminer les actions de liaison de la poutre *(ABC)* avec le bâti en *A* et avec le coulisseau en *C*.

On note :

$$\{Bâti \rightarrow Poutre\} = _A\left\{ X_A\ \vec{x} + Y_A\ \vec{y}\ ;\ \vec{0} \right\}$$
$$\{Coulisseau \rightarrow Poutre\} = _C\left\{ \vec{0}\ ;\ N_C\ \vec{z} \right\}$$



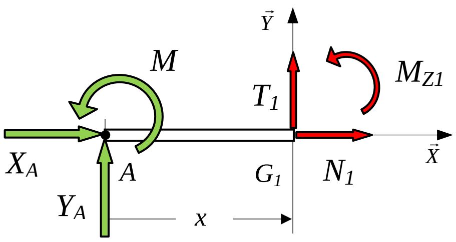
Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre *(ABC)* et calculer X_A, Y_A et N_C.

$X_A =$	$Y_A =$	$N_C =$

2- Déterminer l'expression du moment de flexion M_Z dans la poutre *(ABC)*

21- Déterminer l'expression du moment de flexion M_{Z1} en G_1 (centre de la section droite du profilé de la poutre *(ABC)* entre *A* et *B*).

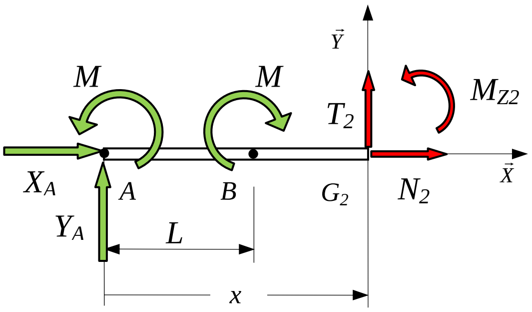
$$\overrightarrow{AG_1} = x\vec{X} \quad (0 \leq x \leq L)$$



$M_{Z1} =$

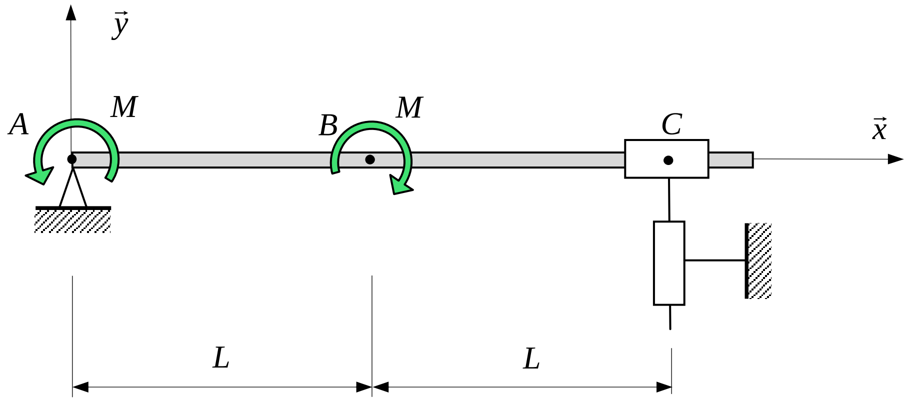
22- Déterminer l'expression du moment de flexion M_{Z2} en G_2 (centre de la section droite du profilé de la poutre *(ABC)* entre *B* et *C*).

$$\overrightarrow{AG_2} = x\vec{X} \quad (L \le x \le 2L)$$



$M_{Z2} =$

3- Déterminer l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre
Cette déformée est calculée dans le repère : $[A;(\vec{x},\vec{y})]$



On note :

- $y_1(x)$ la déformée de la ligne moyenne du tronçon (*AB*),
- $y_2(x)$ la déformée de la ligne moyenne du tronçon (*BC*).

31- Equation $y_1(x)$ de la déformée avec : $0 \le x \le L$
On note C_1 et C_2 les deux constantes d'intégration

$$EI\ y''_1 = M_{z1}$$

$$EI\ y''_1 =$$

$$EI\ y'_1 =$$

$$EI\ y_1 =$$

32- Equation $y_2(x)$ de la déformée avec : $L \leq x \leq 2L$
On note C_3 et C_4 les deux constantes d'intégration

$$EI\ y''_2 = M_{z2}$$
$$EI\ y''_2 =$$

$$EI\ y'_2 =$$

$$EI\ y_2 =$$

33- Conditions aux limites
Exprimer les quatre conditions associées :

- à la liaison en A :

- à la liaison en C :

- à la continuité de la déformée en B :

34- Calculer les quatre constantes d'intégration C_1, C_2, C_3 et C_4.

$C_1 =$	$C_2 =$	$C_3 =$	$C_4 =$

35- En déduire les expressions de $y_1(x)$ et de $y_2(x)$

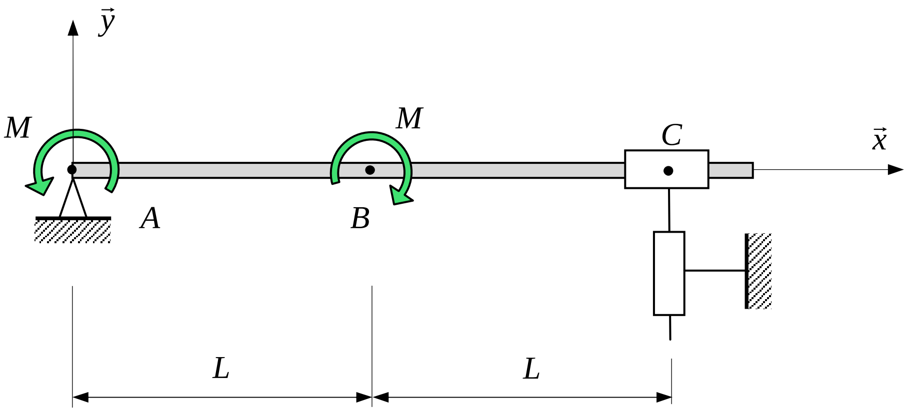
$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

36- Déterminer le déplacement du point C

$d_C =$

37- Tracer l'allure de la déformée de la ligne moyenne



Exercice n°2

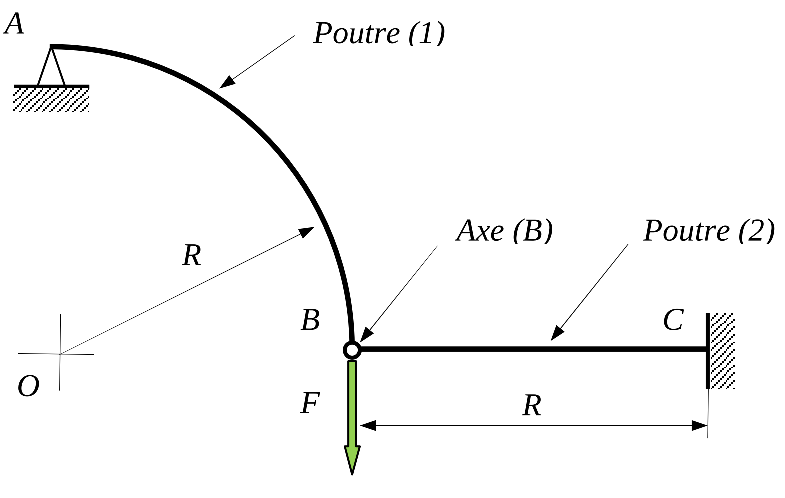
On considère la structure plane constituée d'une poutre courbe *(AB)* de ligne moyenne un quart de cercle de rayon *R* et d'une poutre droite *(BC)* de longueur *R*.
La poutre *(AB)* est en liaison pivot avec le bâti fixe en *A*.
La poutre *(BC)* est en liaison encastrement en *C* avec le bâti fixe.

Les deux poutres *(AB)* et *(BC)* sont en liaison pivot entre elles en *B* au moyen d'un axe *(B)* ***sur lequel*** on applique une charge *F*.

Toutes les liaisons sont parfaites et le poids propre des poutres *(AB)* et *(CD)* et de l'axe *(B)* est négligeable devant le chargement appliqué.

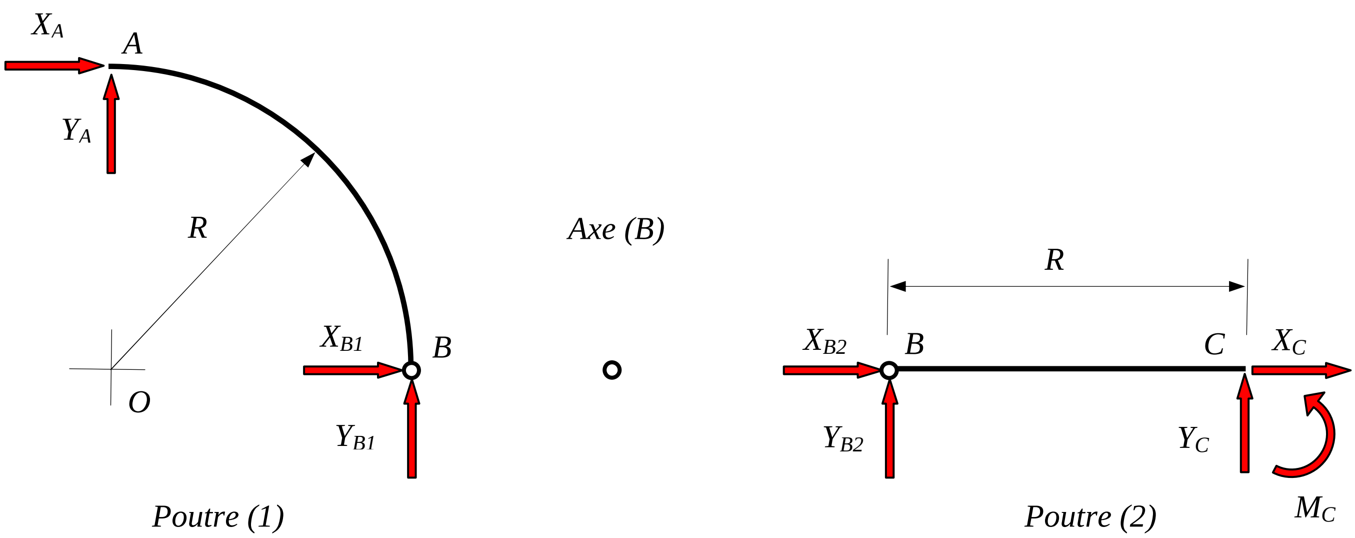
On ne retient pour les calculs que le moment de flexion *Mz*.

On suppose que le module de rigidité à la flexion EI_{Gz}, noté *EI* est constant et le même pour chacune des deux poutres *(1)* et *(2)*.



1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du système

11- Représenter, sur le schéma ci-dessous, les actions extérieures à l'axe *(B)*.



12- Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre *(1)*

= 0	= 0	= 0

(Equation de moment en A)

13- Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre *(2)*

= 0	= 0	= 0

(Equation de moment en C)

14- Ecrire les deux équations d'équilibre de l'axe *(B)*

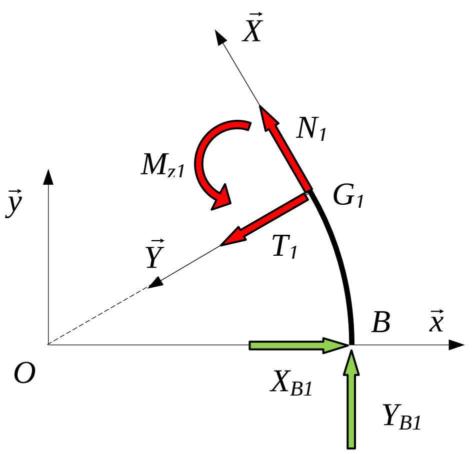
= 0	= 0

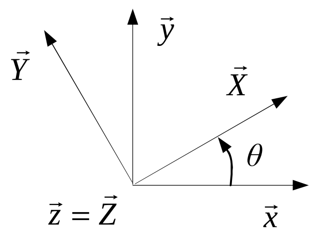
15- On décide de garder X_{B1} comme inconnue hyperstatique
Exprimer, *dans l'ordre proposé*, les composantes des actions de liaisons suivantes en fonction de X_{B1} de R et de F.

X_A =	Y_{B1} =	X_{B2} =
Y_A =	Y_{B2} =	Y_C =
M_C =	X_C =	

2- Déterminer l'expression du moment de flexion M_z dans chacune des deux poutres *(1)* et *(2)*

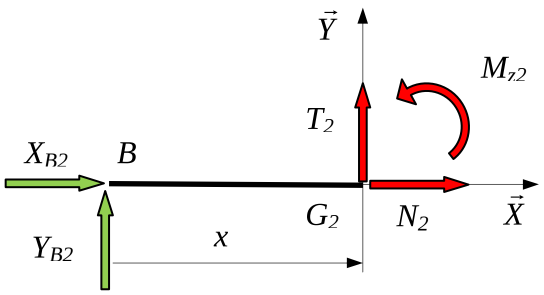
21- Déterminer l'expression du moment de flexion M_{z1} en G_1, centre de la section droite du profilé de la poutre *(1)*, en fonction de X_{B1}, Y_{B1}, R et θ. Avec : $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$





M_{z1} =

22- Déterminer l'expression du moment de flexion M_{z2} en G_2, centre de la section droite du profilé de la poutre *(2)*, en fonction de X_{B2}, Y_{B2} et x. Avec : $0 \le x \le R$



$M_{z2} =$

3- Energie de déformation élastique U de la structure

Ecrire, **sans développer le calcul des intégrales**, l'expression de l'énergie de déformation élastique U de la structure, somme des énergies de déformation élastique des poutres *(1)* et *(2)*, calculée en fonction du moment de flexion M_z.

On rappelle l'expression des moments de flexion M_{z1} dans la poutre *(1)* et M_{z2} dans la poutre*(2)* en fonction de l'inconnue hyperstatique X_{B1}.

$M_{z1} = R(1 - \sin\theta + \cos\theta)X_{B1}$	$M_{z2} = x(X_{B1} - F)$

$U =$

4- Calcul de l'inconnue hyperstatique X_{B1}

41- Théorème utilisé : Expression :

42- Expression de l'inconnue hyperstatique

$X_{B1} =$ F

5- Déplacement de l'axe *(B)*

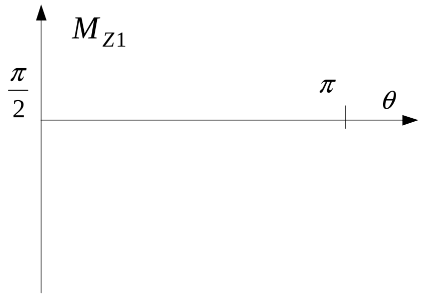
On se propose de calculer ce déplacement, noté $\overrightarrow{\Delta B}$ par application de la deuxième formule de BRESSE entre les points *B* et *C* de la poutre *(2)*.

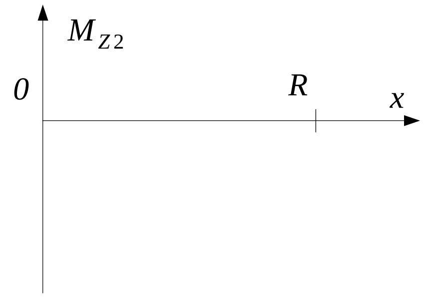
Remarque : La question *4* donne : $X_{B1} = 0.7\ F$

$\overrightarrow{\Delta B} =$

6- Etude des contraintes

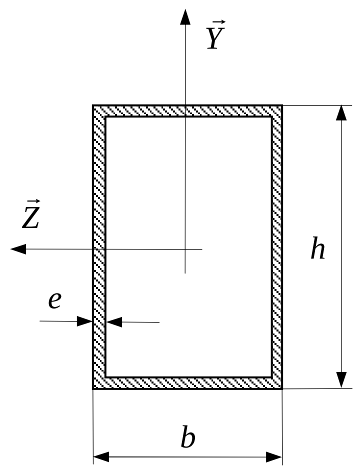
61- Tracer les diagrammes des moments de flexion M_{Z1} et M_{Z2}





62- En déduire la section la plus sollicitée
La repérer sur le schéma de la page *(8)*

63- Les poutres *(1)* et *(2)* sont réalisées au moyen d'un tube rectangulaire de largeur *b*, de hauteur *h* et d'épaisseur *e*.
Donner l'expression de la contrainte normale maximale σ_{max}.
Indiquer sur la figure ci-dessous le ou les points qui supportent la contrainte σ_{max}.



σ_{max} =

7- Application numérique

On donne : R = 1 m, h = 150 mm, b = 100 mm, e = 4 mm,
I_{GZ} = 746,5 cm^4, E = 210 GPa, F = 10 kN et σ_e = 295 MPa.
Calculer :

71- Le déplacement du point *B*

$\Delta B =$ *mm*

72- La contrainte maximale σ_{max}.

$\sigma_{max} =$ MPa

41- Contrainte équivalente $\sigma_{équi}$.

$\sigma_{équi} =$ MPa

42- Le coefficient de sécurité à la limite élastique de la poutre.

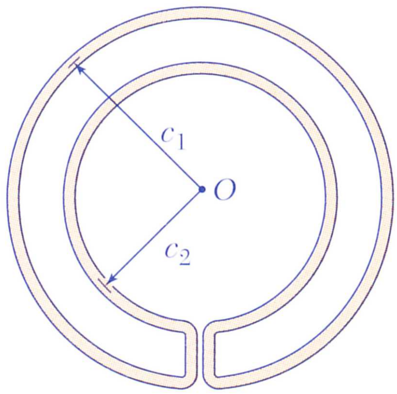
ne =

Exercice n°3

Un tube de refroidissement, de longueur L = 3 m, à la section, d'épaisseur constante e = 3 mm, de rayon c_1 = 150 mm et de rayon c_2 = 100 mm, représentée ci-dessous.
Un couple de torsion T = 3 kN.m est appliqué à chaque extrémité de ce tube.

Module de Coulomb du matériau du tube G = 80 GPa.

Négliger le jeu entre les deux connections des parties extérieures et intérieures.



Section droite du tube

(Les dimensions sont relatives à la ligne moyenne)

1- Déterminer la contrainte de cisaillement moyenne τ

11 - Déterminer le moment de torsion M_t dans le tube en fonction de T.

M_t =

11 - Rappeler l'expression de la contrainte de cisaillement moyenne τ dans un tube mince sollicité en torsion.

τ =

12 - Déterminer l'aire A_m de la surface à l'intérieur de ligne moyenne de la section du tube.

A_m = mm²

13 - Déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement moyenne τ

τ = MPa

2- Déterminer l'angle de torsion du tube

21 - Rappeler l'expression de l'angle de torsion α entre les deux extrémités d'un tube mince de section constante et de longueur L.

$\alpha =$

22 - Calculer le pseudo moment quadratique noté J de la section du tube,

$J =$ mm^4

23 - Calculer l'angle de torsion α du tube,

$\alpha =$ °