

UV : **MQ22**

Semestre : AUTOMNE

**PRINTEMPS**

EXAMEN : **MEDIAN**

**FINAL**

---

NOM :

Prénom :

Né(e) le :

DEPARTEMENT :

NIVEAU :

FILIERE :

---

**Le sujet est composé de 2 exercices totalement indépendants.**

**TOUS LES RESULTATS SERONT JUSTIFIES**



Liège – Pont de l'Observatoire – Santiago Calatrava

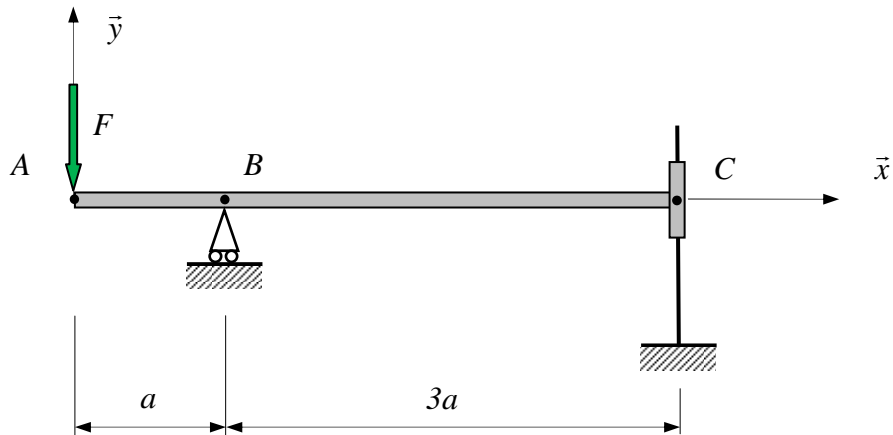
Signature :

Feuille A4 manuscrite  
Calculatrice autorisée



### Exercice n°1

On considère la poutre droite ( $ABC$ ) de longueur  $4a$ , en liaison appui simple parfait en  $B$  et en liaison glissière parfaite de direction  $(\bar{y})$  avec un bâti fixe. La poutre ( $ABC$ ) est sollicitée par une charge concentrée  $F$  appliquée à son extrémité libre  $A$ .



Le poids propre de la poutre ( $ABC$ ) est négligeable devant le chargement appliqué.

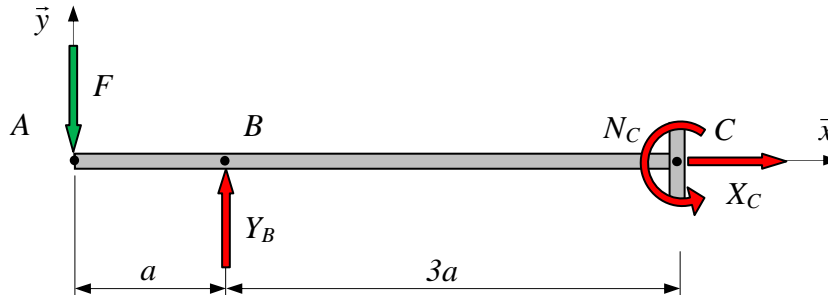
La modélisation retient un problème plan.

On ne retient pour les calculs que le seul moment de flexion  $M_Z$ .

1- Déterminer les actions de liaison de la poutre (ABC) avec le bâti en B et en C.

On note :

$$\{\text{B\^at}i \rightarrow \text{Poutre}\} =_B \{Y_B \bar{y}; \vec{0}\} \quad \{\text{B\^at}i \rightarrow \text{Poutre}\} =_C \{X_C \bar{x}; N_C \bar{z}\}$$



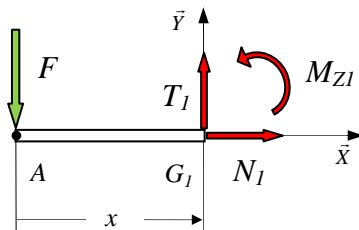
Ecrire les trois \u00e9quations d'\u00e9quilibre de la poutre (ABC) et calculer  $Y_B$ ,  $X_C$  et  $N_C$ .

$Y_B =$	$X_C =$	$N_C =$
---------	---------	---------

2- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_Z$  dans la poutre (ABC)

21- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{Z1}$  en  $G_1$  (centre de la section droite du profil\u00e9 de la poutre (ABC) entre A et B).

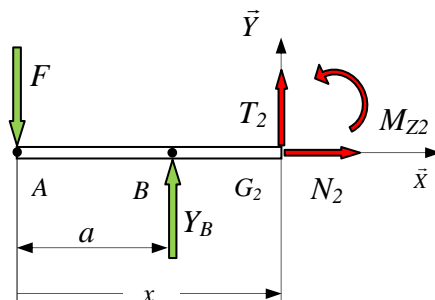
$$\overrightarrow{AG_1} = x\bar{X} \quad (0 \leq x \leq a)$$



$M_{Z1} =$
------------

22- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{Z2}$  en  $G_2$  (centre de la section droite du profil\u00e9 de la poutre (ABC) entre B et C).

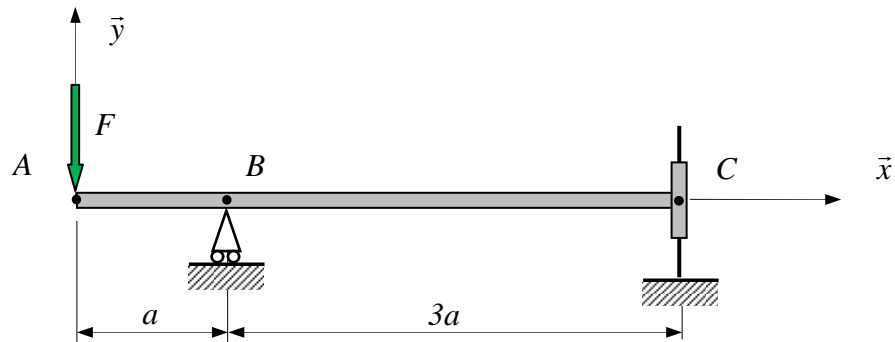
$$\overrightarrow{AG_2} = x\bar{X} \quad (a \leq x \leq 4a)$$



$M_{Z2} =$
------------

(en fonction de F et de a)

- 3- Déterminer l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre  
 Cette déformée est calculée dans le repère :  $[A;(\bar{x}, \bar{y})]$



On note :

- $y_1(x)$  la déformée de la ligne moyenne du tronçon (AB),
- $y_2(x)$  la déformée de la ligne moyenne du tronçon (BC).

- 31- Equation  $y_1(x)$  de la déformée avec :  $0 \leq x \leq a$

On note  $C_1$  et  $C_2$  les deux constantes d'intégration

$$EI y_1'' = M_{z1}$$

$$EI y_1'' =$$

$$EI y_1' =$$

$$EI y_1 =$$

- 32- Equation  $y_2(x)$  de la déformée avec :  $a \leq x \leq 4a$

On note  $C_3$  et  $C_4$  les deux constantes d'intégration

$$EI y_2'' = M_{z2}$$

$$EI y_2'' =$$

$$EI y_2' =$$

$$EI y_2 =$$

33- Conditions aux limites

Exprimer les quatre conditions associées :

○ à la liaison en  $B$  :

○ à la liaison en  $C$  :

○ à la continuité de la déformée en  $B$  :

34- Calculer les quatre constantes d'intégration  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$ .

$C_1 =$	$C_2 =$	$C_3 =$	$C_4 =$
---------	---------	---------	---------

35- En déduire les expressions de  $y_1(x)$  et de  $y_2(x)$

36- Calculer le déplacement  $d_A$  du point A

$$d_A =$$

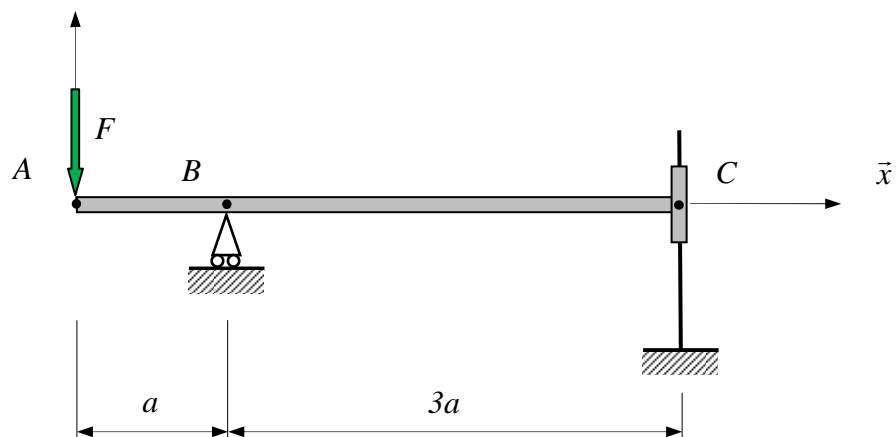
37- Calculer le déplacement  $d_C$  du point C

$$d_C =$$

38- Calculer la rotation  $\omega_B$  de la section de centre B

$$\omega_B =$$

39- Tracer l'allure de la déformée de la ligne moyenne



310- On souhaite que le déplacement du point  $C$  ne dépasse pas  $15 \text{ mm}$ .  
Déterminer le profilé IPE qui répond à ce critère.

On prendra :  $a = 1 \text{ m}$ ,  $F = 27 \text{ kN}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$

IPE \_\_\_\_\_

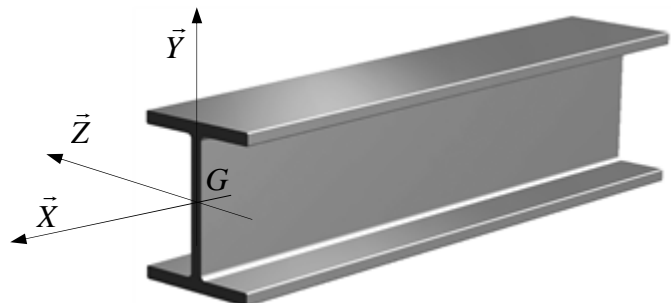
4- Etude des contraintes

41- Tracer le diagramme des moments de flexion  $M_{Z1}$  et  $M_{Z2}$



42- En déduire la(les) section(s) la(les) plus sollicitée(s)

43- Donner l'expression de la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .  
Indiquer sur la figure ci-dessous le ou les points qui supportent cette contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .



$\sigma_{max} =$



44- Calculer la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .

$$\sigma_{max} = \quad MPa$$

45- Calculer la contrainte équivalente à l'aide du critère de Tresca  $\sigma_{\text{équi}}$ .

$$\sigma_{\text{équi}} = \quad MPa$$

46- Calculer le coefficient de sécurité à la limite élastique  $n_e$ .

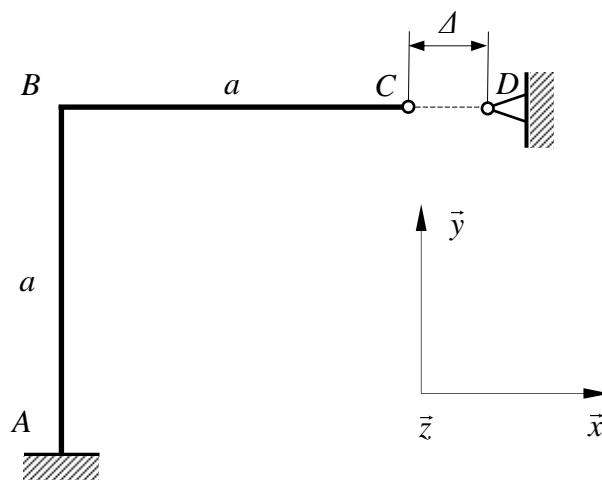
$$n_e =$$

Exercice n°2

On considère la poutre plane  $(ABC)$  représentée ci-dessous.

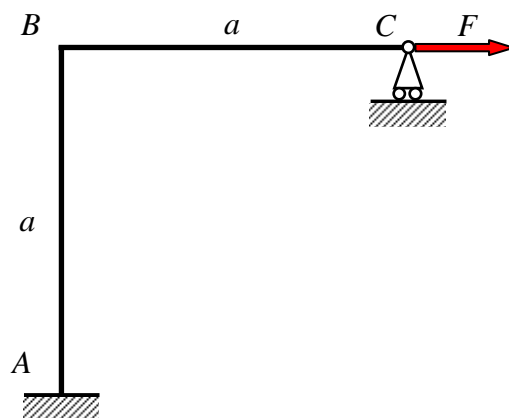
Elle est parfaitement encadrée en  $A$  et devrait être en articulation parfaite en  $D$  avec un bâti fixe.

Une erreur dans la mise en place de l'articulation conduit à un défaut de coaxialité  $\Delta$  ( $\Delta \ll a$ ) entre l'extrémité  $C$  de la poutre et l'axe  $(D, \vec{z})$  de l'articulation.



Pour réaliser la connexion de l'extrémité  $C$  de la poutre avec l'articulation d'axe  $(D, \vec{z})$ , on retient la modélisation suivante :

- on applique un effort  $F$  à l'extrémité  $C$  de la poutre,
- on suppose la poutre en appui simple en  $C$  avec le bâti.



On ne retient pour les calculs que le moment de flexion  $M_z$ .

Le module de rigidité à la flexion  $EI_{Gz}$ , noté  $EI$ , est constant.

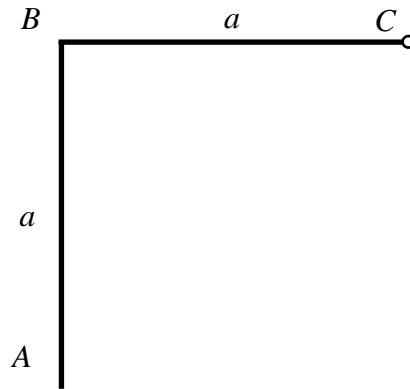
1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du système

11- Représenter, sur le schéma ci-dessous, les actions extérieures à la poutre (ABC)

On note :

$$\{B\hat{a}ti \rightarrow Poutre\} =_A \{X_A \bar{x} + Y_A \bar{y} ; M_A \bar{z}\}$$

$$\{B\hat{a}ti \rightarrow Poutre\} =_C \{Y_C \bar{y} ; \vec{0}\}$$



12- Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre (ABC)

$= 0$	$= 0$	$= 0$
-------	-------	-------

(Equation de moment en A)

13- On décide de garder  $Y_C$  comme inconnue hyperstatique.

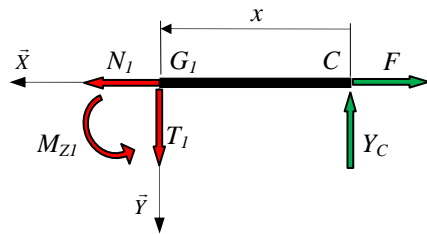
Exprimer les composantes des actions de liaisons suivantes en fonction de  $Y_C$ ,  $F$  et  $a$ .

$X_A =$	$Y_A =$	$M_A =$
---------	---------	---------

2- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_z$

21- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{z1}$  en  $G_1$ , (centre de la section droite du profilé de la poutre entre  $C$  et  $B$ )

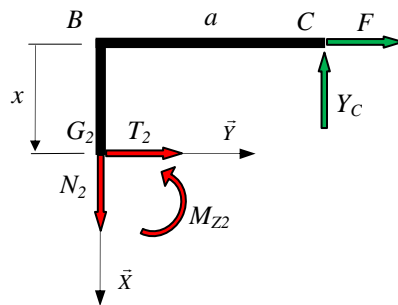
$$\overrightarrow{CG_1} = x \vec{X} \quad (0 \leq x \leq a)$$



$$M_{z1} =$$

22- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{z2}$  en  $G_2$ , (centre de la section droite du profilé de la poutre entre  $B$  et  $A$ )

$$\overrightarrow{BG_2} = x \vec{X} \quad (0 \leq x \leq a)$$



$$M_{z2} =$$

3- Energie de déformation élastique  $U$  de la structure

Ecrire, **sans développer le calcul des intégrales**, l'expression de l'énergie de déformation élastique  $U$  de la poutre, calculée en fonction du moment de flexion  $M_z$ .

$$U =$$

4- Calcul de l'inconnue hyperstatique  $Y_C$

41- Théorème utilisé :

Expression :

42- Expression de l'inconnue hyperstatique

$$Y_C = F$$

5- Déplacement de l'extrémité C de la poutre

On se propose de calculer ce déplacement de deux manières différentes :

- par application du théorème de Castigliano,
- par application de la deuxième formule de Bresse entre les points C et A de la poutre (ABC).

51- Théorème de Castigliano

- ✓ Expression du déplacement du point C noté  $\lambda_c$ .

$\lambda_c =$

- ✓ Expressions du moment fléchissant en fonction de  $F, x, a$

$$M_{z1} = -\frac{3Fx}{8}$$

$$M_{z2} = F\left(x - \frac{3a}{8}\right)$$

- ✓ Calculer  $\lambda_c$

$\lambda_c =$

52- Deuxième formule de Bresse. On note  $\overrightarrow{\Delta C} = \Delta C_x \vec{x} + \Delta C_y \vec{y}$

✓ Expression de  $\overrightarrow{\Delta C}$

✓ Calculer  $\Delta C_x$

$\Delta C_x =$
----------------

✓ Calculer  $\Delta C_y$

$$\Delta C_y =$$



53- En déduire l'expression de l'effort  $F$  à appliquer pour connecter l'extrémité  $C$  de la poutre avec l'axe  $(D, \vec{z})$  de l'articulation

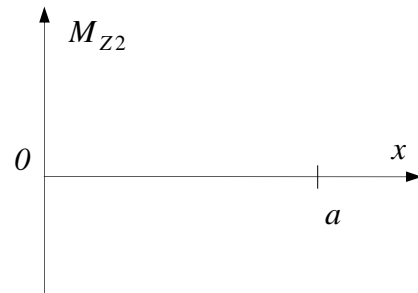
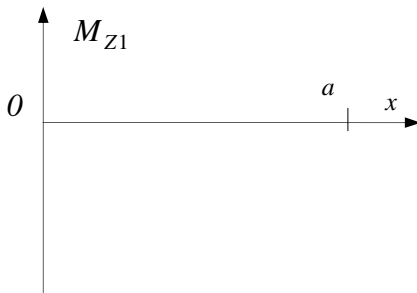
$$F =$$

54- Application numérique  
 $a = 3 \text{ m}$ ,  $\Delta = 5 \text{ mm}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ , IPE 200

$$F = \quad N$$

6- Etude des contraintes

61- Tracer les diagrammes des moments de flexion  $M_{Z1}$  et  $M_{Z2}$



62- En déduire la section la plus sollicitée

63- Donner l'expression de la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .

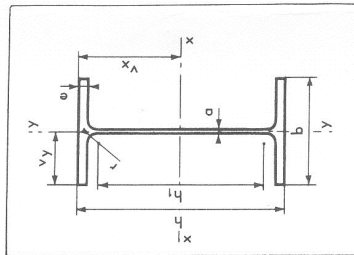
$$\sigma_{max} =$$

64- Application numérique

$$\sigma_{max} = \quad \text{MPa}$$

# I

## POUTRELLES IPE



Norme de référence :  
NF A 45-205 (août 1962)

Profils	Dimensions						Masse par mètre P	Section A	Surface de peinture	Caractéristiques rapportées à l'axe neutre										Moment d'inertie de torsion J	Module de raideur d
	h	b	a	e	r	Partie droite de l'âme h <sub>1</sub>				cm <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /m	m <sup>2</sup> /t	I <sub>x</sub>	I <sub>x</sub> / v <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	Moment statique S	Distance des centres	η <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>		
80	80	46	3,8	5,2	5	60	6,0	7,64	0,329	54,8	80,1	20,0	3,24	11,6	6,9	3,33	8,49	3,69	1,05	0,70	0,299
100	100	55	4,1	5,7	7	75	8,1	10,3	0,401	49,5	171	34,2	4,07	19,7	8,7	4,22	15,9	5,79	1,24	1,10	0,313
120	120	64	4,4	6,3	7	93	10,4	13,2	0,474	45,6	318	53,0	4,90	30,4	10,5	5,10	27,7	8,65	1,45	1,71	0,336
140	140	73	4,7	6,9	7	112	12,9	16,4	0,550	42,6	541	77,3	5,74	44,2	12,2	5,99	44,9	12,3	1,65	2,54	0,359
160	160	82	5,0	7,4	9	127	15,8	20,1	0,622	39,4	869	109	6,58	61,9	14,0	6,90	68,3	16,7	1,84	3,53	0,379
180	180	91	5,3	8,0	9	146	18,8	23,9	0,698	37,1	1 317	146	7,42	83,2	15,9	7,76	101	22,2	2,05	4,90	0,404
200	200	100	5,6	8,5	12	159	22,4	28,5	0,768	34,3	1 943	194	8,26	110	17,6	8,66	142	28,5	2,24	6,46	0,425
220	220	110	5,9	9,2	12	178	26,2	33,4	0,848	32,4	2 772	252	9,11	143	19,4	9,62	205	37,3	2,48	8,86	0,460
240	240	120	6,2	9,8	15	190	30,7	39,1	0,921	30,0	3 892	324	9,97	183	21,2	10,55	284	47,3	2,69	11,60	0,490
270	270	135	6,6	10,2	15	220	36,1	45,9	1,04	28,8	5 790	429	11,2	242	24,2	11,88	420	62,2	3,02	14,93	0,510
300	300	150	7,1	10,7	15	249	42,2	53,8	1,16	27,5	8 356	557	12,5	314	26,6	13,20	604	80,5	3,35	19,47	0,535
330	330	160	7,5	11,5	18	271	49,1	62,6	1,25	25,5	11 770	713	13,7	402	29,3	14,52	788	98,5	3,55	25,70	0,558
360	360	170	8,0	12,7	18	299	57,1	72,7	1,35	23,6	16 270	904	15,0	510	31,9	15,83	1 043	123	3,79	36,20	0,600
400	400	180	8,6	13,5	21	331	66,3	84,5	1,47	22,2	23 130	1 160	16,5	654	35,4	17,50	1 318	146	3,95	46,80	0,607
450	450	190	9,4	14,6	21	379	77,6	98,8	1,61	20,7	33 740	1 500	18,5	849	39,7	19,33	1 676	176	4,12	63,80	0,616
500	500	200	10,2	16,0	21	426	90,7	116	1,74	19,2	48 200	1 930	20,4	1 100	43,9	21,28	2 142	214	4,31	89,00	0,640
550	550	210	11,1	17,2	24	468	106	134	1,88	17,7	67 120	2 440	22,3	1 390	48,2	23,02	2 668	254	4,45	118,4	0,657
600	600	220	12,0	19,0	24	514	122	156	2,02	16,6	92 080	3 070	24,3	1 760	52,4	25,16	3 387	308	4,66	166,2	0,697