

UV : **MQ22**

Semestre : AUTOMNE

**PRINTEMPS**

EXAMEN : **MEDIAN**

**FINAL**

---

NOM :

Prénom :

Né(e) le :

DEPARTEMENT :

NIVEAU :

FILIERE :

---

Le sujet est composé de 3 exercices totalement indépendants.

**TOUS LES RESULTATS SERONT JUSTIFIES**



Passerelle Sacré-Cœur de Coaticook (Québec)

Signature :

Feuille A4 manuscrite  
et calculatrice autorisées

## Exercice n°1

On considère la poutre ( $ABC$ ) parfaitement encastrée en  $C$  avec un bâti fixe. Initialement, la poutre est droite, horizontale et non chargée.

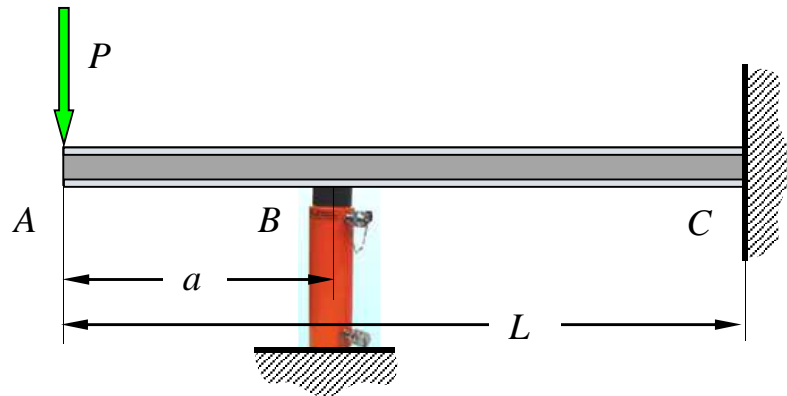
On applique une charge concentrée  $P$  à son extrémité libre de centre  $A$ . Le point  $A$  se déplace alors vers le bas.

On utilise un vérin hydraulique, placé au point  $B$ , pour soulever la poutre et ramener le point  $A$  dans sa position initiale.

On se propose de déterminer :

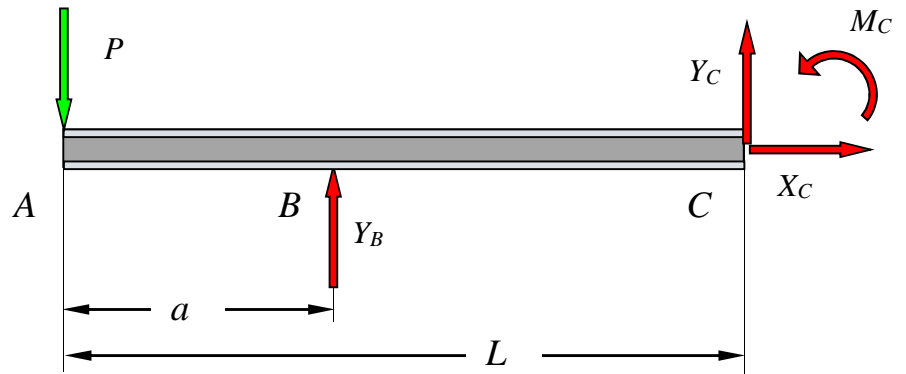
- L'effort appliqué au point  $B$  par le vérin sur la poutre,
- De combien le vérin hydraulique doit soulever la poutre en  $B$ .

La poutre ( $ABC$ ) est réalisée avec un profilé  $W 5*5*16$  (*Poutrelles américaines à larges ailes*) de moment quadratique  $I_{GZ}$  noté  $I$ , en acier de module d'Young  $E$ .



1- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème

11- On isole la poutre (ABC).



12- Ecrire les trois équations d'équilibre de la poutre (ABC)

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum M_C = 0$
----------------	----------------	----------------

(Equation de moment en C)

13- On décide de garder  $Y_B$  comme inconnue hyperstatique

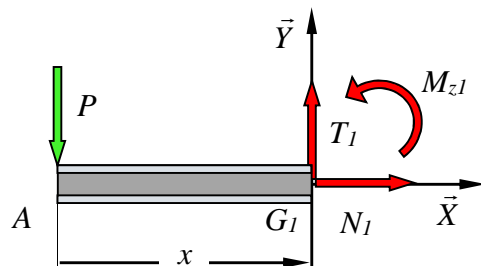
Exprimer les composantes des actions de liaisons suivantes

$M_C =$	$X_C =$	$Y_C =$
---------	---------	---------

2- Déterminer les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion dans la poutre (ABC)

21- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{z1}$  en  $G_1$  (centre de la section droite du profilé de la partie (AB) de la poutre).

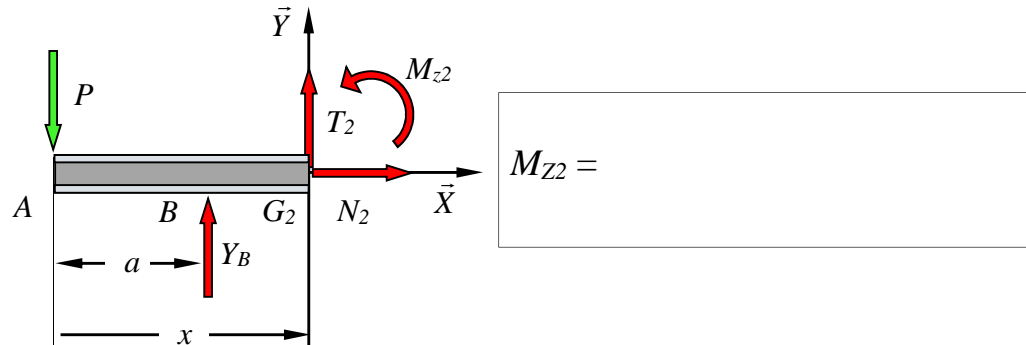
Avec :  $\overrightarrow{AG_1} = x \vec{X} \quad 0 \leq x \leq a$



$M_{z1} =$
------------

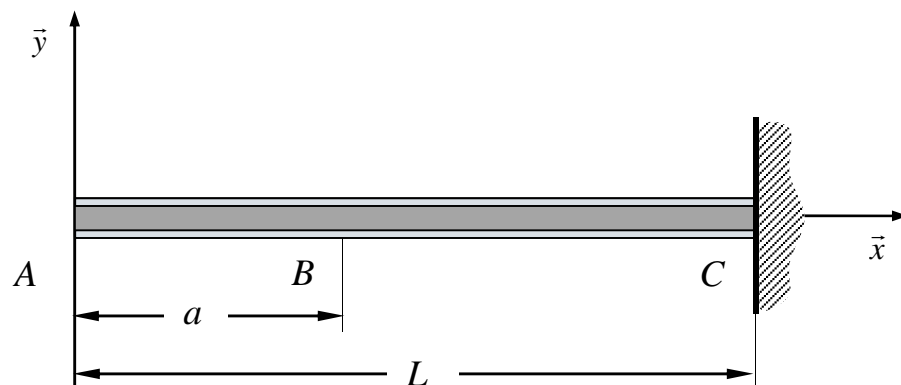
- 22- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{z_2}$  en  $G_2$  (centre de la section droite du profilé de la partie  $(BC)$  de la poutre).

Avec :  $\overrightarrow{AG_2} = x \vec{X}$   $a \leq x \leq L$



- 3- On se propose de déterminer le **déplacement  $d_B$  du centre  $B$**  de la section de la poutre sous l'action du vérin hydraulique et de **lever l'hyperstaticité** du problème à l'aide de l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre  $(ABC)$ .

Cette déformée est calculée dans le repère :  $[A; (\bar{x}, \bar{y})]$



- 31- Equation  $y_1(x)$  de la déformée avec :  $0 \leq x \leq a$   
On note  $C_1$  et  $C_2$  les deux constantes d'intégration

$$EI_2 y''_1 =$$

$$EI_2 y'_1 =$$

$$EI_2 y_1 =$$

- 32- Equation  $y_2(x)$  de la déformée avec :  $a \leq x \leq L$   
 On note  $C_3$  et  $C_4$  les deux constantes d'intégration

$$EI_2 y_2'' =$$

$$EI_2 y_2' =$$

$$EI_2 y_2 =$$

- 33- Conditions aux Limites (CL)

- Point A (CL 1)

- Point B (CL 2)

- Point B (CL 3)

- Point C (CL 4)  
(CL 5)



- 34- Ecrire (sans les résoudre) les conséquences des conditions aux limites

- (CL 1)

- (CL 2)

- (CL 3)

- (CL 4)

- (CL 5)

- 35- Les conditions aux limites précédentes ont permis de calculer les quatre constantes et l'inconnue hyperstatique  $Y_B$

$C_1 = C_3 = \frac{aL^2 P}{2(2L + a)}$	$C_2 = C_4 = 0$	$Y_B = \frac{2L^3 P}{(L - a)^2 (2L + a)}$
----------------------------------------	-----------------	-------------------------------------------

- 36- En déduire le déplacement du  $d_B$  du point  $B$

$$d_B =$$

- 37- Application numérique

On donne :  $P = 22.5 \text{ kN}$ ,  $a = 1.25 \text{ m}$ ,  $L = 3.10 \text{ m}$ ,  
 $I_{GZ} = 885.5 \text{ cm}^4$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$

- Effort  $Y_B$  du vérin sur la poutre

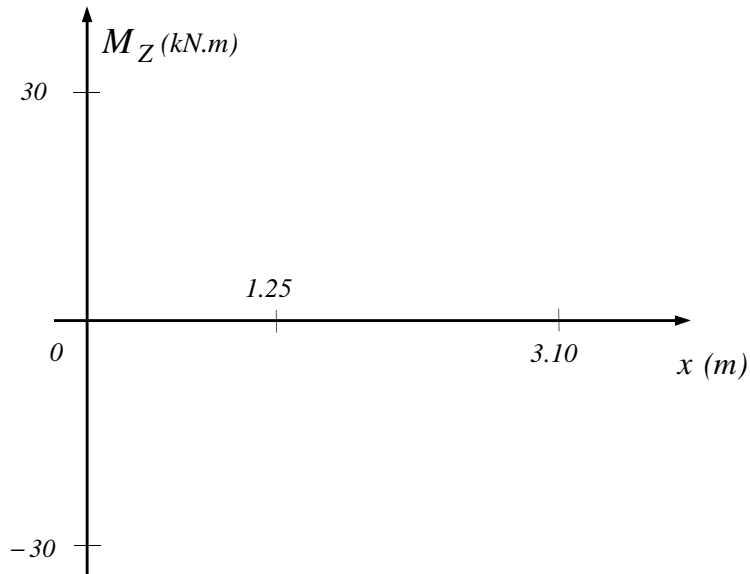
$$Y_B = \quad \quad \quad N$$

- Soulèvement de la poutre (déplacement du point  $B$ )

$$d_B = \quad \quad \quad mm$$

4- Etude des contraintes

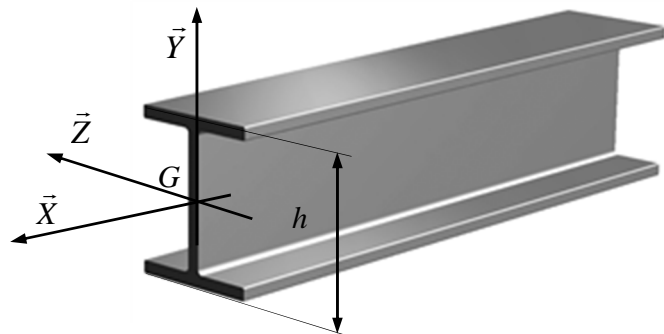
41- Tracer le diagramme du moment de flexion  $M_Z$



42- En déduire la section la plus sollicitée

43- Donner l'expression de la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$  et indiquer sur la figure ci-dessous le ou les points qui supportent cette contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .

$\sigma_{max} =$



44- Calculer la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .  
On donne :  $h = 127 \text{ mm}$

$\sigma_{max} = \quad \text{MPa}$

45- Calculer la contrainte équivalente  $\sigma_{\text{équi}}$  à l'aide du critère de Tresca

$$\sigma_{\text{équi}} = \quad \text{MPa}$$

46- Calculer le coefficient de sécurité à la limite élastique  $n_e$ .  
On donne :  $\sigma_e = 355 \text{ MPa}$

$$n_e =$$



## Exercice n°2

On considère une poutre treillis constituée d'une poutre droite ( $ACB$ ), d'une **entretoise indéformable** placée en son milieu  $C$  et de quatre tirants identiques, un de chaque côté de la poutre entre  $A$  et  $D$  et un de chaque côté de la poutre entre  $B$  et  $D$ .

Les deux tirants ( $AD$ ) et les deux tirants ( $BD$ ), sont des barres droites en acier de module d'Young  $E$ , de section circulaire d'aire  $S_I$ , de longueur  $L_I$ , en liaisons pivot parfaites avec l'entretoise en  $D$  et en liaisons pivot parfaites avec la poutre ( $ACB$ ) respectivement en  $A$  et en  $B$ .

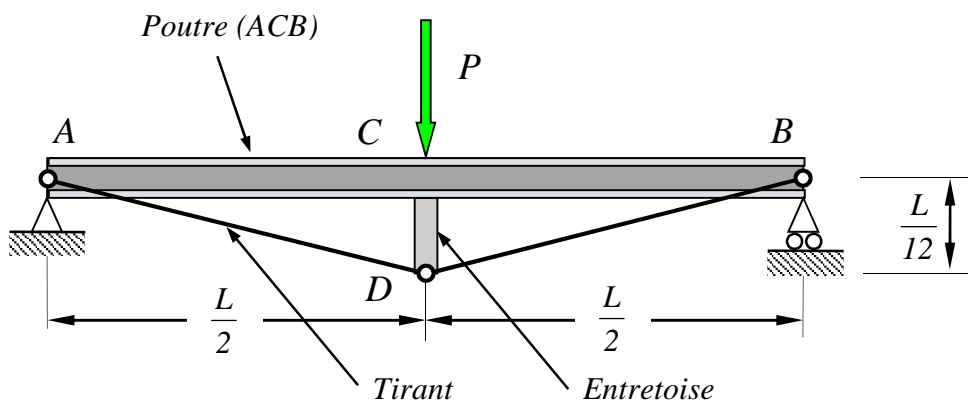
La poutre ( $ACB$ ), de longueur  $L$ , est réalisée avec un profilé  $W 18*11*119$  (*Poutrelles américaines à larges ailes*) de moment quadratique  $I_{GZ}$  noté  $I_2$ , en acier de module d'Young  $E$ .

La poutre ( $ACB$ ) est en liaison pivot parfaite en  $A$  et en liaison contact ponctuel parfait en  $B$  avec un bâti parfaitement rigide.

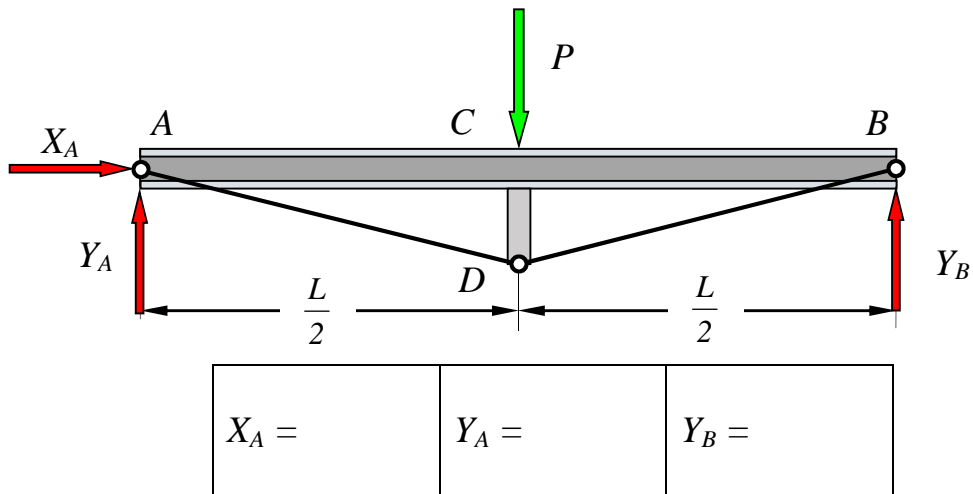
Le poids propre des quatre tirants ( $AD$ ) et ( $BD$ ) et de la poutre ( $ACB$ ) est négligeable devant le chargement  $P$  appliqué.

Avant application de la charge  $P$  sur la poutre, les quatre tirants sont ni tendus ni comprimés.

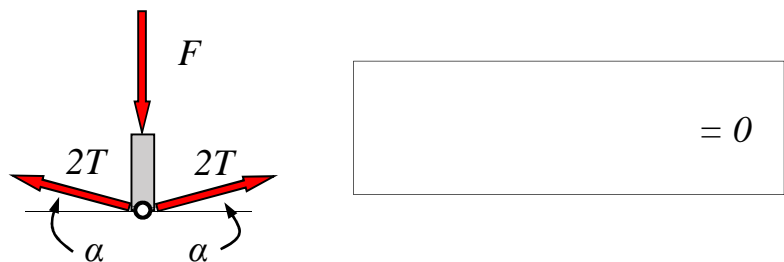
On retient pour les calculs l'effort normal  $N_I$  dans les tirants ( $AD$ ) et ( $BD$ ) et le moment de flexion  $M_{z_2}$  dans la poutre ( $ACB$ ).



- 1- Déterminer les actions de liaison avec le bâti en A et B  
On isole la poutre treillis.

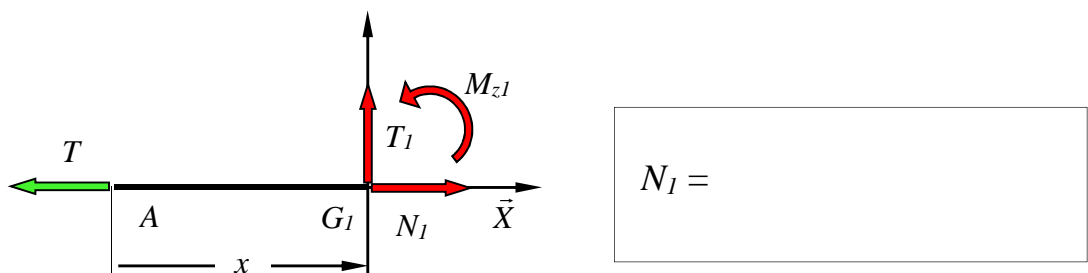


- 2- Déterminer le degré d'hyperstaticité du problème  
On isole l'entretoise.  
On note  $F$  l'action de la poutre (ACB) et  $T$  l'action de chacun des quatre tirants sur l'entretoise.  
Ecrire l'équation d'équilibre de l'entretoise



On décide de garder  $T$  comme inconnue hyperstatique

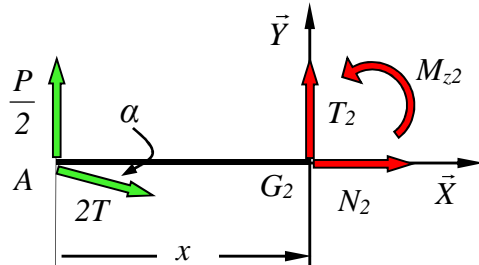
- 3- Déterminer les éléments de réduction du torseur des forces de cohésion dans les tirants (AD) et (BD) et dans la poutre (ACB)  
31- Déterminer l'expression de l'effort normal  $N_I$  dans la section droite de centre  $G_I$  d'un tirant. Avec :  $0 \leq x \leq L_I$



- 32- Déterminer l'expression du moment de flexion  $M_{z_2}$  en  $G_2$  (centre de la section droite du profilé de la partie  $(AC)$  de la poutre).

**Du fait de la symétrie** on étudie seulement la moitié gauche de la poutre.

Avec :  $\overrightarrow{AG_2} = x \vec{X} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$



$M_{z_2} =$

- 4- Energie de déformation élastique  $U$  de la poutre treillis  
 Calculer l'énergie de déformation élastique  $U$  de la poutre treillis, somme des énergies de déformation élastique des quatre tirants  $(AD)$  et  $(BD)$  et de la poutre  $(ACB)$ .

$U =$

5- Calcul de l'inconnue hyperstatique  $T$

(Vous pouvez passer directement à la question 7 sans répondre à celle-ci)

51- Théorème utilisé :

Expression :

52- Expression de l'inconnue hyperstatique  $T$

$$T =$$

6- En déduire l'expression de l'action  $F$  de la poutre sur l'entretoise

$$F =$$

7- On se propose de calculer le déplacement  $d_C$  du centre  $C$  de la section centrale de la poutre ( $ACB$ ) à l'aide du théorème de Castigliano.

On notera **impérativement**  $T = \lambda P$

$$d_C =$$

8- Application numérique

On donne : diamètre des tirants ( $AD$ ) et ( $BD$ )  $d_1 = 40 \text{ mm}$ ,  
profilé de la poutre ( $ACB$ )  $W 18*11*119$ ,  $h = 482 \text{ mm}$ ,  $I_2 = 91040 \text{ cm}^4$ ,  
 $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_e = 355 \text{ MPa}$ ,  $L = 11 \text{ m}$ ,  $P = 89 \text{ kN}$ ,  $\lambda = 0.647 \text{ SI}$

81- Calculer  $\sin\alpha$  et  $\cos\alpha$

$\sin\alpha =$	$\cos\alpha =$
----------------	----------------

82- Calculer l'effort de traction  $T$  dans les tirants

$T =$	$N$
-------	-----

83- Calculer l'effort  $F$  de contact entre l'entretoise et la poutre

$F =$	$N$
-------	-----

84- Calculer le déplacement  $d_C$  de la section de centre  $C$  de la poutre

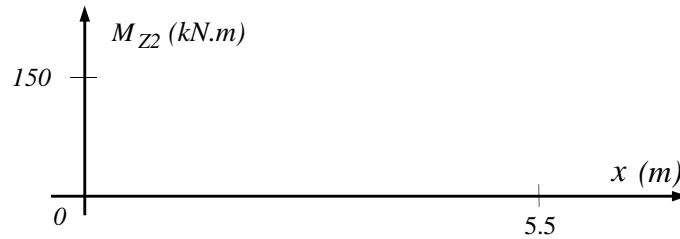
$d_C =$	$mm$
---------	------

9- Etude des contraintes

91- Calculer la contrainte normale  $\sigma_I$  dans chacun des quatre tirants

$\sigma_I =$	$MPa$
--------------	-------

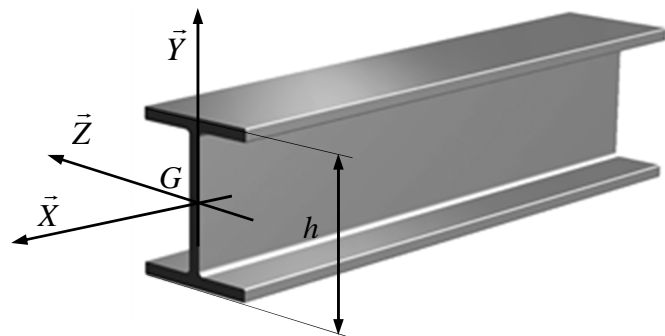
92- Tracer le diagramme du moment de flexion  $M_{Z2}$  dans la moitié gauche (AC) de la poutre



93- En déduire la section la plus sollicitée

94- Donner l'expression de la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$  et indiquer sur la figure ci-dessous le ou les points qui supportent cette contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .

$\sigma_{max} =$



95- Calculer la contrainte normale maximale  $\sigma_{max}$ .

$\sigma_{max} =$                        $MPa$

### Exercice n°3

On considère une vis d'assemblage  $H - M8 - 50$

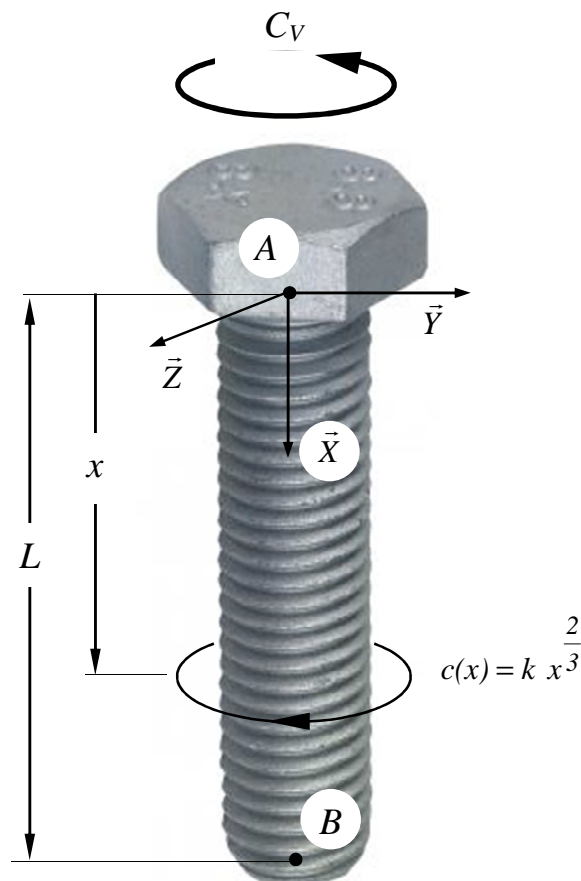
Pour la visser on applique sur sa tête hexagonale, à l'aide d'une clé à pipe, un couple  $\vec{C}_V = -C_V \vec{X}$ .

Les actions du taraudage de la pièce sur la tige  $AB$  de la vis sont représentées par un couple réparti  $\vec{c}(x) = c(x) \vec{X}$  (en  $N.m/m$ ) qui peut être exprimé par la relation

$$c(x) = k x^{\frac{2}{3}} \quad (x \text{ en } m).$$

La tige  $AB$  de la vis est un cylindre de section circulaire, de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ .

On note  $I_{GX}$  le moment quadratique polaire de la section droite de la tige par rapport à l'axe  $(G, \vec{X})$



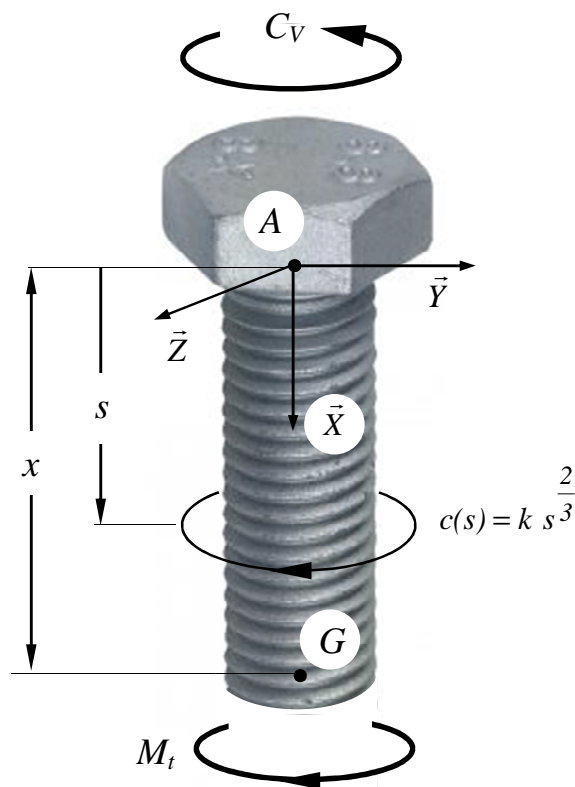
1- Déterminer la constante  $k$ .

On isole la vis  $H$ . Ecrire l'équation de moment en projection sur l'axe  $(A, \vec{X})$  des actions extérieures à la vis  $H$ .

$$k =$$

(en fonction de  $C_V$  et  $L$ )

2- Déterminer le moment de torsion dans une section droite de centre  $G$  (centre de la section droite de la tige de la vis  $(AB)$ ). Avec :  $0 \leq s \leq x$



$$M_t =$$

(en fonction de  $C_V$ ,  $k$  et  $x$ )



3- Déterminer l'angle de torsion  $\alpha_{AB}$  entre les deux extrémités  $A$  et  $B$  de la tige de la vis  $H$ .

$$\alpha_{AB} =$$

4- Calculer la contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{max}$  dans la tarière

✓ Déterminer la section de tige de la vis la plus sollicitée

✓ Calculer la contrainte cisaillement maximale  $\tau_{max}$  dans cette section

$$\tau_{max} =$$

### 5- Application numérique

Rappel :  $I_{GX} = \frac{\pi d^4}{32}$

On donne :  $d = 8 \text{ mm}$ ,  $L = 50 \text{ mm}$ ,  $G = 75 \text{ GPa}$ ,  $C_V = 50 \text{ N.m}$

✓ Constante  $k$

$k =$	$SI$
-------	------

✓ Moment quadratique polaire  $I_{GX}$

$I_{GX} =$	$cm^4$
------------	--------

✓ Angle de torsion  $\alpha_{AB}$

$\alpha_{AB} =$	$^\circ$
-----------------	----------

✓ Contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{max}$

$\tau_{max} =$	$MPa$
----------------	-------