

Durée : 2 h - Documents autorisés

Barème : 1 point par question – Maximum : 25/20

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroté les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Flexion d'une poutre encastree-libre

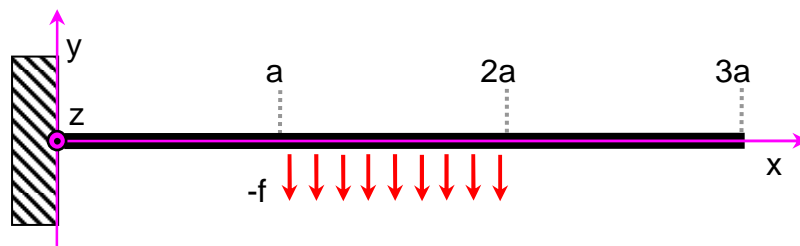


Fig. 1 : La poutre encastree-libre, soumise localement à un effort linéique.

Une densité linéique d'effort $-f$ est appliquée sur un tronçon d'une poutre encastree-libre, conformément à la Fig. 1.

- 1.1. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre $2a$ et $3a$.
- 1.2. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre a et $2a$.
- 1.3. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et a .
- 1.4. Tracer le graphe des évolutions du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et $3a$.
- 1.5. Tracer le graphe des évolutions de la dérivée du moment fléchissant pour x compris entre 0 et $3a$.
- 1.6. Y a-t-il un rapport entre la dérivée du moment fléchissant et l'effort tranchant ?
Si oui, lequel ?

2. Flexion d'une poutre sur 2 appuis simples

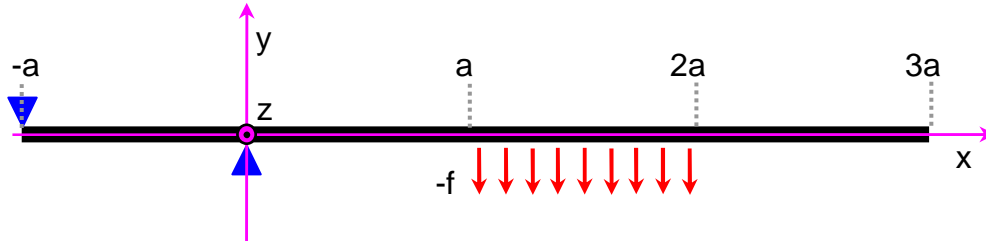


Fig. 2 : La poutre sur 2 appuis simples, soumise localement à un effort linéique.

La poutre de la Fig. 2 est identique à celle de la Fig. 1 pour toute la partie $x > 0$. Sa fixation est différente : au lieu d'un encastrement, elle est réalisée par 2 appuis simples.

- 2.1. Pour x compris entre 0 et $3a$, les expressions de $T_y(x)$ et de $M_z(x)$ établies précédemment (questions 1.1, 1.2 et 1.3) sont-elles encore valables ?
Si oui, pourquoi ?
Si non, donner les nouvelles expressions.
- 2.2. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre de la Fig. 2.
- 2.3. En déduire les efforts exercés par les 2 appuis simples sur la poutre, en $x = -a$ et $x = 0$.
- 2.4. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre $-a$ et 0.
- 2.5. Quelle est la valeur maximale de la valeur absolue de $M_z(x)$ et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
- 2.6. La section de la poutre est rectangulaire.
Son épaisseur (dans la direction y) est notée e .
Sa largeur, dans la direction z , est égale à $10e$.
Calculer le moment quadratique I_z de la section de la poutre, en fonction de e seulement (il n'est pas demandé de démontrer la formule utilisée).
- 2.7. En quels points de la poutre la contrainte normale est-elle maximale ?
- 2.8. Quelle est cette valeur maximale ?
L'expression attendue contient f , a et e seulement.
- 2.9. Application numérique :
 $f = 1000 \text{ N/m}$ $a = 1 \text{ m}$ $e = 2 \text{ cm}$
Si la limite d'élasticité du matériau de la poutre est de 250 MPa , et qu'une norme demande que les contraintes normales statiques soient partout inférieures à la moitié de cette valeur, le dimensionnement de la poutre est-il satisfaisant ?

3. Autre flexion d'une poutre encastree-libre et oscillations

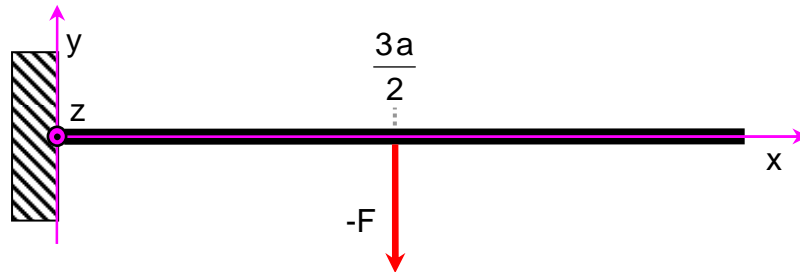


Fig. 3 : La poutre encastree-libre, soumise à un effort ponctuel.

La poutre de la Fig. 3 est identique géométriquement à celle de la Fig. 1.

Sa section a été décrite à la question 2.6.

Elle est constituée d'un matériau de module d'Young E .

Son chargement est différent : il s'agit maintenant d'un effort unique $-F$, appliqué en

$$x = \frac{3a}{2}.$$

- 3.1. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et $\frac{3a}{2}$.
- 3.2. Calculer le déplacement vertical du point d'application de la force, noté $V_y\left(\frac{3a}{2}\right)$.
- 3.3. Soit $K = \frac{-F}{V_y\left(\frac{3a}{2}\right)}$ la rigidité de la poutre, définie pour un effort appliqué en $x = \frac{3a}{2}$.

Donner l'expression de K en fonction de a , e et E uniquement.

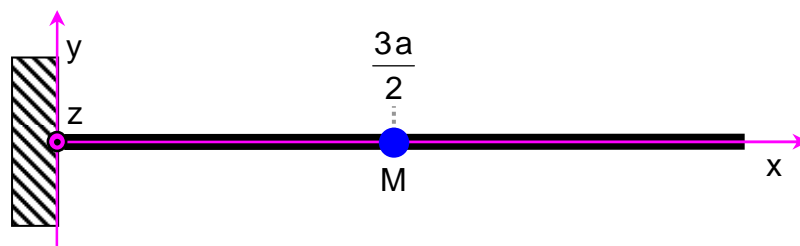


Fig. 4 : Une masse ponctuelle sur la poutre encastree-libre.

La poutre de la Fig. 4 est la même que celle de la de la Fig. 3.

Une masse ponctuelle M est fixée en $x = \frac{3a}{2}$.

L'accélération de la pesanteur est parallèle à la direction y , de module g , et dirigée vers le bas.

Il est admis que la masse propre de la poutre peut être négligée par rapport à celle de la masse ponctuelle M .

y_M désigne la position verticale de la masse M .

- 3.4. Calculer y_M lorsque la poutre a fléchi sous l'effet du poids de la masse M .

- 3.5. La masse M est amenée à $y_M = 0$, puis, à l'instant $t = 0$, elle est libérée sans vitesse initiale.
A un instant ultérieur t quelconque, quels sont les efforts appliqués à la masse M ?
- 3.6. Appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'équation différentielle que doit satisfaire $y_M(t)$.
- 3.7. En tenant compte des conditions initiales, donner la solution $y_M(t)$ de cette équation.
- 3.8. Constaté qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa période T , en fonction de M , a , e et E .
- 3.9. Application numérique :
 $M = 100 \text{ kg}$ $a = 1 \text{ m}$ $e = 2 \text{ cm}$ $E = 70 \text{ GPa}$
 Calculer numériquement la période T .
- 3.10. En utilisant les résultats précédents, et en adoptant la valeur arrondie $g = 10 \text{ m/s}^2$, donner la valeur numérique de la contrainte normale maximale atteinte dans la poutre, au cours du temps.

Éléments de réponses

Question 1.1

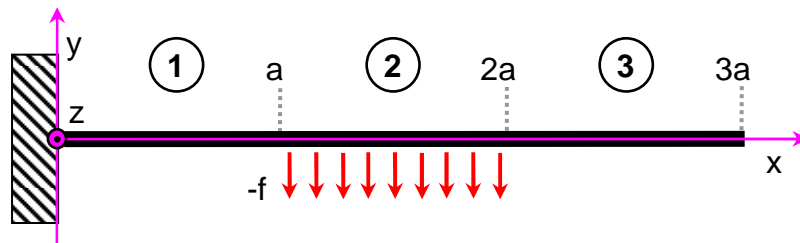


Fig. 5 : La poutre divisée en 3 tronçons.

Le long du tronçon 3 ($2a < x < 3a$ – voir Fig. 5), toutes les composantes du torseur de cohésion sont nulles.

$$\begin{cases} T_y(x) = 0 \\ M_z(x) = 0 \end{cases}$$

Question 1.2

Le long du tronçon 2 ($a < x < 2a$ – voir Fig. 5), la densité linéique d'effort, en aval d'une section, est équivalente à un effort unique, centré entre x et $2a$, parallèle à la direction y , dans le sens négatif, et de module égal à $f(2a - x)$.

$$\begin{cases} T_y(x) = -f(2a - x) \\ M_z(x) = -\frac{f}{2}(2a - x)^2 \end{cases}$$

Question 1.3

Le long du tronçon 1 ($0 < x < a$ – voir Fig. 5), les efforts en aval d'une section sont équivalents à un effort unique, centré entre a et $2a$, parallèle à la direction y , dans le sens négatif et de module égal à $f a$.

$$\begin{cases} T_y(x) = -f a \\ M_z(x) = -f a \left(\frac{3}{2} a - x \right) \end{cases}$$

Question 1.4

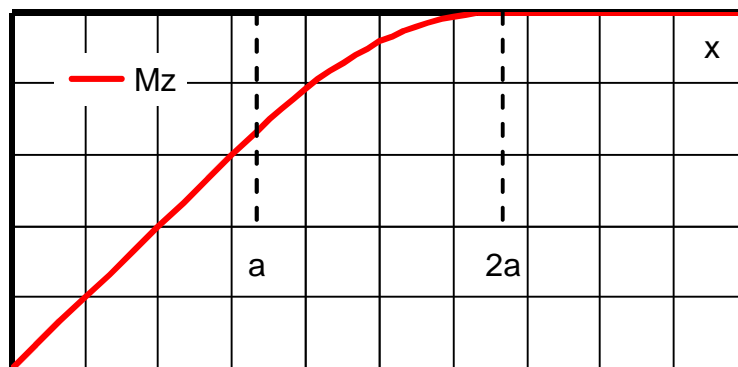


Fig. 6 : Evolution du moment fléchissant M_z le long de la poutre.

Question 1.5

La dérivée du moment fléchissant est calculée le long de chacun des 3 tronçons.

Tronçon 1 : $\frac{dM_z}{dx} = f a$ Tronçon 2 : $\frac{dM_z}{dx} = f (2 a - x)$ Tronçon 3 : $\frac{dM_z}{dx} = 0$

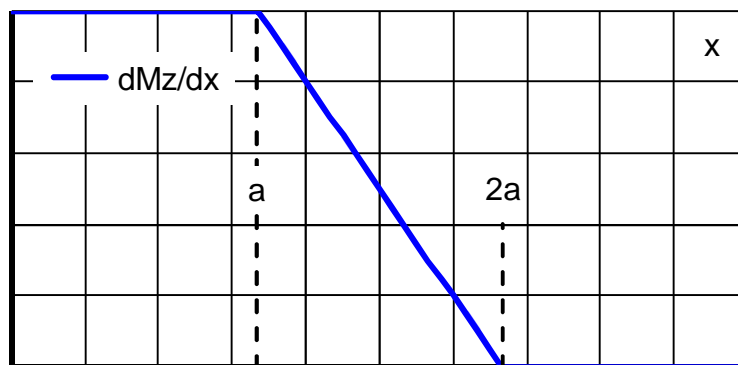


Fig. 7 : Evolution de la dérivée du moment fléchissant M_z le long de la poutre.

Question 1.6

Oui, il y a un rapport entre ces 2 grandeurs.

L'effort tranchant est égal à l'opposé de la dérivée, par rapport à x , du moment fléchissant.

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y(x)$$

Question 2.1

Oui, ces expressions restent valables.

En effet, pour toute section en $x > 0$, les efforts exercés par l'aval sur l'amont sont inchangés.

Le torseur de cohésion est donc inchangé

Remarque

Il est faux de dire que les 2 appuis sont équivalents à un encastrement, car les conditions aux limites sont différentes, ce qui conduit à des déplacements des sections différents.

Question 2.2

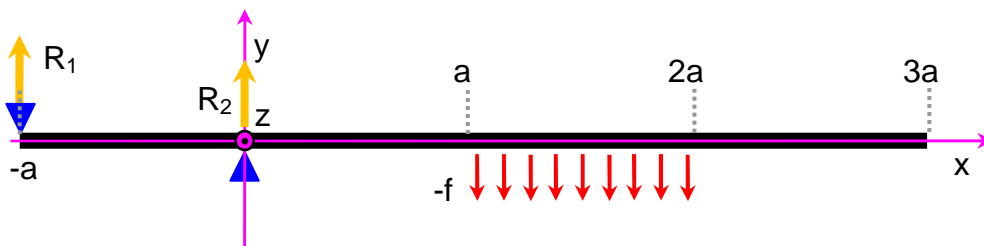


Fig. 8 : La poutre et les réactions des appuis simples.

Les 2 appuis simples exercent sur la poutre 2 efforts R_1 et R_2 , dans la direction y , comme le montre la Fig. 8.

Il y a 2 équations à écrire : celle qui traduit l'équilibre des efforts dans la direction y et celle qui traduit l'équilibre des moments par rapport à un point (par exemple l'extrémité de la poutre, en $x = -a$).

$$\begin{cases} R_1 + R_2 - f a = 0 \\ -\frac{5}{2} f a^2 + R_2 a = 0 \end{cases}$$

Question 2.3

La résolution du système fournit les valeurs (algébriques) des 2 efforts.

$$\begin{cases} R_1 = -\frac{3}{2} f a \\ R_2 = \frac{5}{2} f a \end{cases}$$

Question 2.4

$$\begin{cases} T_y(x) = \frac{3}{2} f a \\ M_z(x) = -\frac{3}{2} f a (a + x) \end{cases}$$

Question 2.5

L'étude de ses variations montre que le moment fléchissant est maximum, en valeur absolue, pour $x = 0$.

$$|M_z(0)| = \frac{3}{2} f a^2$$

Question 2.6

La valeur du moment quadratique I_z peut être déduite de la formule valable pour une section de poutre de section rectangulaire de côtés b (direction z) et h (direction y) :

$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_z = \frac{5 e^4}{6}$$

Question 2.7

La contrainte normale due au moment fléchissant est maximale sur le bord supérieur de la poutre, au niveau de la section où la valeur absolue du moment fléchissant (négatif) est maximale.

$$x = 0 \quad y = \frac{e}{2} \quad -5 e \leq z \leq 5 e$$

Question 2.8

En général, la contrainte normale σ due au moment fléchissant M_z est donnée par :

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{|M_z(0)| e}{2 I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{9 f a^2}{10 e^3}$$

Question 2.9

$$\sigma_{\max} = 112,5 \text{ MPa}$$

Le dimensionnement est satisfaisant.

Question 3.1

L'expression du moment fléchissant peut être déduite du résultat trouvé pour le tronçon 1 à la question 1.3, en remplaçant f par F .

$$M_z(x) = -F \left(\frac{3}{2} a - x \right)$$

Question 3.2

Le déplacement latéral $V_y(x)$ des sections de la poutre est lié au moment fléchissant

$$M_z(x) \text{ par l'équation différentielle : } \frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E I_z}$$

En tenant compte de l'expression de l'expression de $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et $\frac{3a}{2}$:

$$\frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = -\frac{F}{E I_z} \left(\frac{3}{2} a - x \right)$$

$$1^{\text{ère}} \text{ intégration : } \frac{dV_y(x)}{dx} = -\frac{F}{E I_z} \left(\frac{3}{2} a x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

C_1 est une constante d'intégration qui est déterminée grâce à la condition d'encastrement, qui implique que la pente de la déformée est nulle en $x = 0$.

$$C_1 = 0$$

$$2^{\text{ème}} \text{ intégration : } V_y(x) = -\frac{F}{E I_z} \left(\frac{3}{2} a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

C_2 est une constante d'intégration qui est être déterminée grâce à la condition d'encastrement, qui implique que le déplacement transversal nul en $x = 0$.

$$C_2 = 0$$

$$V_y(x) = -\frac{F x^2}{12 E I_z} (9 a - 2 x)$$

Pour $x = \frac{3a}{2}$ et en remplaçant I_z par son expression en fonction de e :

$$V_y\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{27 F a^3}{20 E e^4}$$

Question 3.3

La réponse découle de la définition de K .

$$K = \frac{20 E e^4}{27 a^3}$$

Question 3.4

La valeur de y_M demandée est égale au déplacement $V_y\left(\frac{3a}{2}\right)$, lorsque l'effort F est égal au poids $M g$ de la masse M .

$$y_M = -\frac{27 M g a^3}{20 E e^4}$$

Ce qui peut s'écrire plus simplement, en faisant intervenir la rigidité K .

$$y_M = -\frac{M g}{K}$$

Question 3.5

A un instant $t > 0$ quelconque, 2 efforts s'exercent sur la masse M , positionnée en y_M :

- Son poids, égal à $-Mg$.
- L'effort de rappel dû à l'élasticité de la poutre, égal à $-K y_M$.

Question 3.6

Application du théorème de la résultante dynamique.

$$-Mg - K y_M = M y_M''$$

$$M y_M'' + K y_M = -Mg$$

Question 3.7

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

- Solution générale de l'équation sans second membre.

$$M y_M'' + K y_M = 0$$

$$y_M^{G0}(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

- Solution particulière de l'équation complète, trouvée sous la forme d'une constante.

$$y_M^P(t) = -\frac{Mg}{K}$$

- Solution générale de l'équation complète.

$$y_M(t) = y_M^{G0}(t) + y_M^P(t)$$

$$y_M(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{Mg}{K}$$

Les constantes A et φ sont déduites des conditions initiales.

$$\begin{cases} y_M(0) = 0 \\ y_M'(0) = 0 \\ A \cos(\varphi) - \frac{Mg}{K} = 0 \\ -A \omega \sin(\varphi) = 0 \\ A = \frac{Mg}{K} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$y_M(t) = \frac{Mg}{K} [\cos(\omega t) - 1]$$

Question 3.8

La période T des oscillations de la masse M se déduit de la pulsation propre ω .

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$T = \frac{3\pi a}{e^2} \sqrt{\frac{3aM}{5E}}$$

Question 3.9

$$T = 0,69 \text{ s}$$

Question 3.10

Au cours du temps, la position $y_M(t)$ de la masse M est donnée par l'équation trouvée précédemment.

$$y_M(t) = \frac{Mg}{K} [\cos(\omega t) - 1]$$

D'où les valeurs extrêmes atteintes par $y_M(t)$.

$$-\frac{2Mg}{K} \leq y_M(t) \leq 0$$

Le déplacement maximum (négatif) est donc le double du déplacement statique, calculé à la question 3.4.

L'effort maximum exercé sur la poutre est donc le double du poids de la masse.

A certains instants, le moment fléchissant en $x = 0$ et la contrainte normale maximale qu'il induit sont donc également multipliés par 2, par rapport à leurs valeurs statiques.

En remarquant que les données numériques sont telles que $f a = Mg$, il apparaît donc que la contrainte normale maximale atteinte au cours du temps est le double de celle qui a été calculée à la question 2.9.

$$\sigma_{\text{max au cours du temps}} = 225 \text{ MPa}$$