MQ40 - Automne 2013
Sujet de l'Examen FINAL
15/01/2014

Durée : 2 h - Documents autorisés

Barème : 1 point par question – Maximum : 25/20

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Flexion d'une poutre encastrée-libre

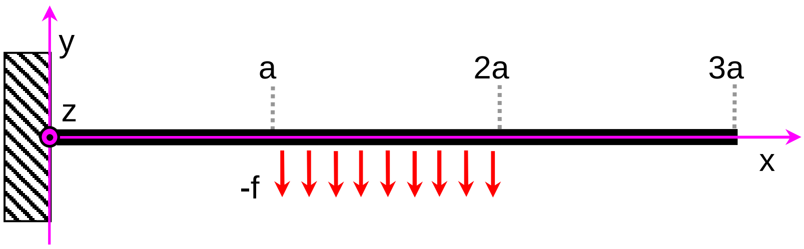

Fig. 1 : La poutre encastrée-libre, soumise localement à un effort linéique.

Une densité linéique d'effort -f est appliquée sur un tronçon d'une poutre encastrée-libre, conformément à la Fig. 1.

1.1. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 2a et 3a.

1.2. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre a et 2a.

1.3. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et a.

1.4. Tracer le graphe des évolutions du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et 3a.

1.5. Tracer le graphe des évolutions de la dérivée du moment fléchissant pour x compris entre 0 et 3a.

1.6. Y a-t-il un rapport entre la dérivée du moment fléchissant et l'effort tranchant ? Si oui, lequel ?

MQ40 - Automne 2013
Sujet de l'Examen FINAL
15/01/2014

2. Flexion d'une poutre sur 2 appuis simples

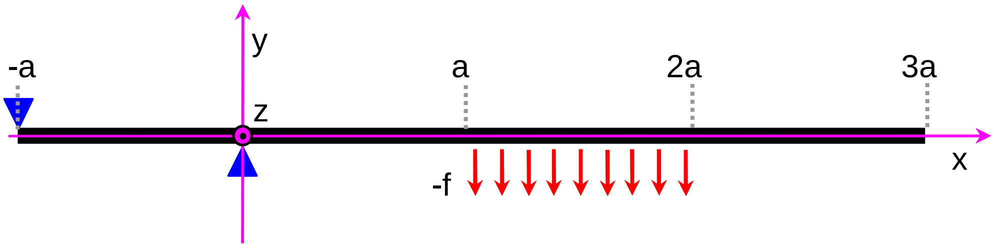

Fig. 2 : La poutre sur 2 appuis simples, soumise localement à un effort linéique.

La poutre de la Fig. 2 est identique à celle de la Fig. 1 pour toute la partie x > 0.
Sa fixation est différente : au lieu d'un encastrement, elle est réalisée par 2 appuis simples.

2.1. Pour x compris entre 0 et 3a, les expressions de $T_y(x)$ et de $M_z(x)$ établies précédemment (questions 1.1, 1.2 et 1.3) sont-elles encore valables ?
Si oui, pourquoi ?
Si non, donner les nouvelles expressions.

2.2. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre de la Fig. 2.

2.3. En déduire les efforts exercés par les 2 appuis simples sur la poutre, en x = -a et x = 0.

2.4. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre -a et 0.

2.5. Quelle est la valeur maximale de la valeur absolue de $M_z(x)$ et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?

2.6. La section de la poutre est rectangulaire.
Son épaisseur (dans la direction y) est notée e.
Sa largeur, dans la direction z, est égale à 10e.
Calculer le moment quadratique I_z de la section de la poutre, en fonction de e seulement (il n'est pas demandé de démontrer la formule utilisée).

2.7. En quels points de la poutre la contrainte normale est-elle maximale ?

2.8. Quelle est cette valeur maximale ?
L'expression attendue contient f, a et e seulement.

2.9. Application numérique :
f = 1000 N/m a = 1 m e = 2 cm
Si la limite d'élasticité du matériau de la poutre est de 250 MPa, et qu'une norme demande que les contraintes normales statiques soient partout inférieures à la moitié de cette valeur, le dimensionnement de la poutre est-il satisfaisant ?

MQ40 - Automne 2013
Sujet de l'Examen FINAL
15/01/2014

3. Autre flexion d'une poutre encastrée-libre et oscillations

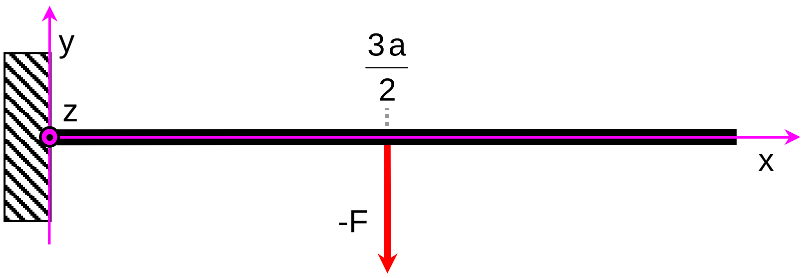

Fig. 3 : La poutre encastrée-libre, soumise à un effort ponctuel.

La poutre de la Fig. 3 est identique géométriquement à celle de la Fig. 1.
Sa section a été décrite à la question 2.6.
Elle est constituée d'un matériau de module d'Young E.
Son chargement est différent : il s'agit maintenant d'un effort unique -F, appliqué en $x = \frac{3a}{2}$.

3.1. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ pour x compris entre 0 et $\frac{3a}{2}$.

3.2. Calculer le déplacement vertical du point d'application de la force, noté $V_y\left(\frac{3a}{2}\right)$.

3.3. Soit $K = \frac{-F}{V_y\left(\frac{3a}{2}\right)}$ la rigidité de la poutre, définie pour un effort appliqué en $x = \frac{3a}{2}$.

Donner l'expression de K en fonction de a, e et E uniquement.

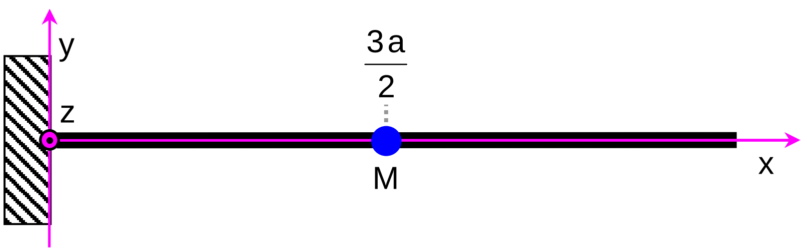

Fig. 4 : Une masse ponctuelle sur la poutre encastrée-libre.

La poutre de la Fig. 4 est la même que celle de la de la Fig. 3.
Une masse ponctuelle M est fixée en $x = \frac{3a}{2}$.
L'accélération de la pesanteur est parallèle à la direction y, de module g, et dirigée vers le bas.
Il est admis que la masse propre de la poutre peut être négligée par rapport à celle de la masse ponctuelle M.
y_M désigne la position verticale de la masse M.

3.4. Calculer y_M lorsque la poutre a fléchi sous l'effet du poids de la masse M.

3.5. La masse M est amenée à $y_M = 0$, puis, à l'instant t = 0, elle est libérée sans vitesse initiale.
A un instant ultérieur t quelconque, quels sont les efforts appliqués à la masse M ?

3.6. Appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'équation différentielle que doit satisfaire $y_M(t)$.

3.7. En tenant compte des conditions initiales, donner la solution $y_M(t)$ de cette équation.

3.8. Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa période T, en fonction de M, a, e et E.

3.9. Application numérique :
M = 100 kg a = 1 m e = 2 cm E = 70 GPa
Calculer numériquement la période T.

3.10. En utilisant les résultats précédents, et en adoptant la valeur arrondie g = 10 m/s², donner la valeur numérique de la contrainte normale maximale atteinte dans la poutre, au cours du temps.