MQ40 - MQ43 - Automne 2013
Sujet de l'Examen MEDIAN
09/11/2013

Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Trajectoire des points d'une roue roulant sur un rail horizontal

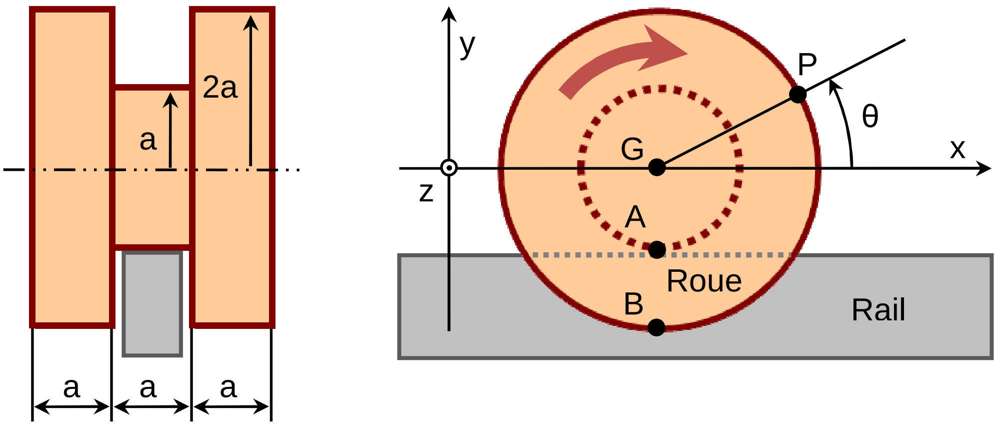

Fig. 1 : Géométrie et repérage de la roue.

La Fig. 1 ci-dessus décrit une roue constituée de 3 disques solidaires.
Cette roue se déplace à vitesse constante en roulant sans glisser sur un rail horizontal.
Soit V le module de la vitesse de son centre de gravité G.
Cette vitesse est orientée suivant l'axe Gx, dans le sens positif.

1.1. Compte tenu de la condition de roulement sans glissement, quelle est la vitesse de rotation de la roue ?

1.2. Exprimer le torseur cinématique de la roue au point G, en fonction de V et de la cote a uniquement.

1.3. Quel est le vecteur vitesse du point A repéré sur la Fig. 1 ?

1.4. Quel est le vecteur vitesse du point B repéré sur la Fig. 1 ?

1.5. Quel est le vecteur vitesse d'un point P quelconque de la périphérie de la roue, en fonction de l'angle θ défini par la Fig. 1 ?

1.6. Soit le point P de la périphérie de la roue tel que, à l'instant t = 0, θ = 0.
Quelle est la valeur de l'angle θ qui caractérise la position de ce point P à un instant t > 0 quelconque ?

1.7. Etablir les équations décrivant la trajectoire de ce point P, sous la forme x(t) = … et y(t) = …, ces équations ne contenant que les paramères a et V.

1.8. Tracer la trajectoire du point P, en calculant ses coordonnées x(t) et y(t) pour quelques instants t particuliers.

2. La roue descend une pente et rejoint un plan horizontal

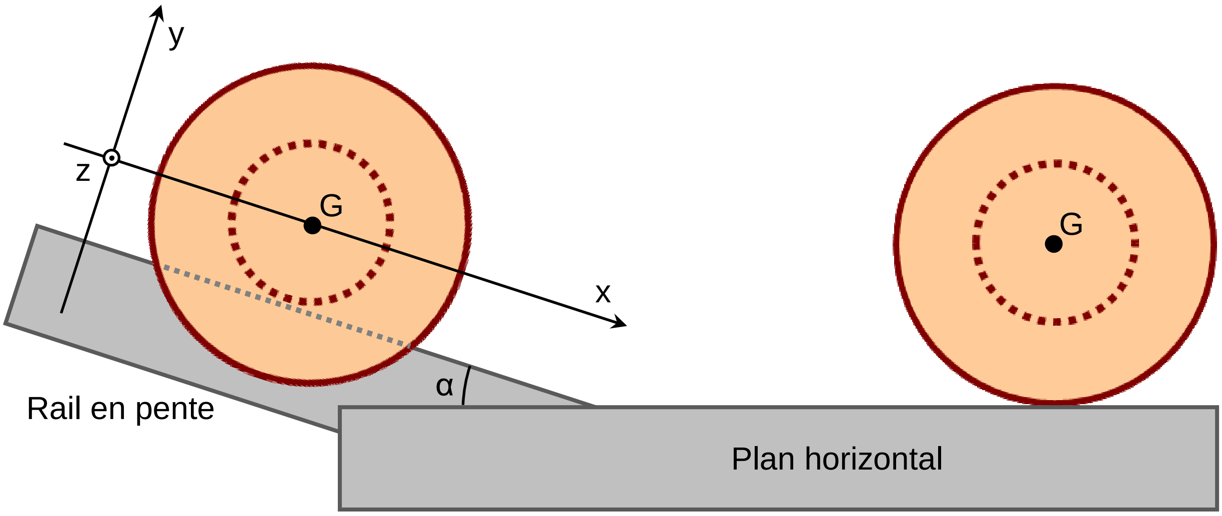

Fig. 2 : Parcours de la roue.

La roue définie par la Fig. 1 est maintenant placée en haut d'un rail en pente, dont la direction fait un angle α avec l'horizontale, voir la partie gauche de la Fig. 2.
A l'instant t = 0, elle est libérée sans vitesse initiale.
Sous l'effet de la pesanteur, dirigée verticalement, vers le bas, et d'intensité g, la roue descend le rail en pente, en roulant sans glisser.

2.1. Sachant que les 3 disques de la roue sont constitués du même matériau homogène, déterminer son moment d'inertie par rapport à l'axe Gz, noté I_{GZ}.
Ce moment d'inertie sera exprimé uniquement en fonction de la masse M de la roue et de la cote a.
Il n'est pas demandé de démontrer la formule qui donne le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe.

2.2. Effectuer un bilan des efforts qui s'exercent sur la roue et appliquer le théorème de la résultante dynamique.

2.3. Appliquer le théorème du moment dynamique.

2.4. Quelle est la relation que la condition de roulement sans glissement permet d'écrire entre l'accélération angulaire de la roue et l'accélération x''_G de son centre de gravité ?

2.5. Donner l'expression de l'accélération x''_G, en fonction de g et de α uniquement.

2.6. Le point G étant placé en x = 0 à l'instant t = 0, à quel instant t_1 atteindra-t-il le bas de la pente, en x = L ?

2.7. Quelle sera alors sa vitesse V_1 (dans la direction x) ?

2.8. Quelle sera alors l'énergie cinétique E_C de la roue (à exprimer en fonction de M, g, L et α uniquement) ?

2.9. Quand la roue entre en contact avec le plan horizontal, la vitesse de son centre de gravité change de direction et de module, voir la partie droite de la Fig. 2.
En supposant que la roue continue à rouler sans glisser et qu'elle conserve intégralement son énergie cinétique, déterminer la nouvelle vitesse V_2 de son centre de gravité, à exprimer en % de V_1.

3. Moment d'inertie d'un hyperboloïde de révolution

Un solide S est défini comme un tronçon d'hyperboloïde de révolution.
Il est homogène, de masse volumique ρ.
Ses frontières, exprimées en coordonnées cylindriques, dans un repère d'origine O, sont :

- Les plans d'équation $z = -H$ et $z = +H$
- La surface latérale d'équation $\left(\frac{c^2 + H^2}{R^2}\right) r^2 - z^2 = c^2$

H, R et c sont 3 constantes positives.

3.1. Exprimer $r_{max}(z)$, distance radiale entre l'axe Oz et un point de la surface latérale, puis calculer $r_{max}(-H)$, $r_{max}(0)$, et $r_{max}(H)$.

3.2. Dessiner le solide S, en faisant apparaître l'axe Oz, ainsi que les cotes H et R.

3.3. Quelle est la géométrie du solide S quand c = 0 ?

3.4. Vers quelle géométrie le solide S tend-il quand c tend vers l'infini ?

3.5. Calculer la masse M du solide S.

3.6. Vérifier que la masse M trouvée prend les valeurs attendues pour c = 0 et c tendant vers l'infini.

3.7. Calculer le moment d'inertie I_Z du solide S par rapport à son axe de révolution et simplifier son expression en faisant intervenir la masse M.

3.8. Vérifier que le moment d'inertie I_Z prend les valeurs attendues pour c = 0 et c tendant vers l'infini.