

MQ41

RESISTANCE DES MATERIAUX

"INTRODUCTION AUX CALCULS DES STRUCTURES"

UTBM, le 19 janvier 2011

Examen Final

K-E. ATCHOLI

"Aucun document n'est autorisé"

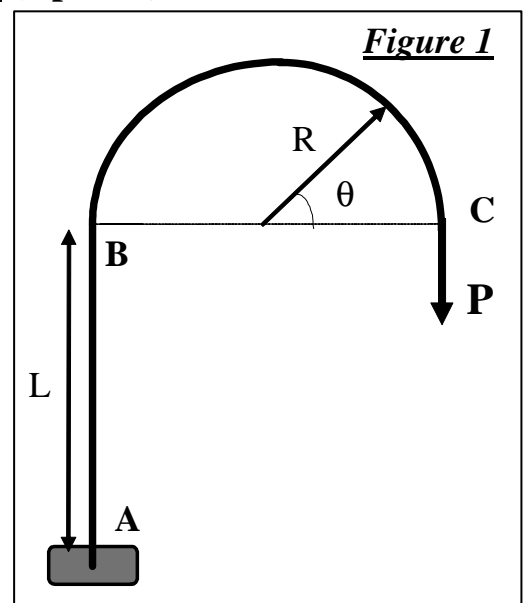
Traiter A et B sur des feuilles séparées

A- Etude des Poutres

A1- Energie de Déformation de Poutre : Figure 1 (4 points)

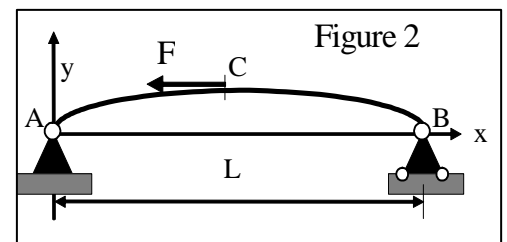
On considère une structure ABC (figure 1) de rigidité en flexion EI, de section constante, constituée d'une tige AB de longueur L et d'une poutre BC de ligne moyenne circulaire de rayon R. Elle est encastrée en C et supporte une charge verticale P en C. En considérant que la structure ne se déforme principalement qu'en flexion,

- 1- Ecrire l'expression de l'énergie de déformation en flexion du système.
- 2- Déterminer le déplacement vertical du point C.



A2- Flambage de Poutre : Figure 2 (6 points)

On considère une poutre droite AB, de longueur L, de section constante et de rigidité en flexion EI. Articulée en A et en appui simple en B, elle est soumise en son milieu C à une charge de compression F (Figure 2).



- 1- Etudier au flambage le comportement de la poutre en déterminant les déformées de la poutre : y_1 sur AC et y_2 sur CB en posant $k^2 = \frac{F}{EI}$;
- 2- Montrer par la continuité en C que y'_1 et y'_2 conduisent à une fonction de type $\operatorname{tg}X = \frac{3X}{X^2 - 9}$ avec $X = \frac{kL}{2}$
- 3- Montrer par un tracer graphique de la fonction que la charge critique de flambage vaut: $F_c = 1,890 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

B- Rigidité des Poutres - Analyse Limite Critères de Défaillance (plasticité rupture)

B1- Méthode de Rigidité : Figure 3 (4 points)

On considère 3 poutres **AD**, **BD** et **CD** de même rigidité **ES**, articulées aux extrémités et supportant une charge verticale **F** à l'extrémité en **D**.

Déterminer en utilisant la méthode de rigidité :

- 1- le déplacement vertical de l'extrémité **D** : δ (F, H, E, S, α).
- 2- les réactions R_A, R_B, R_C dans les poutres.

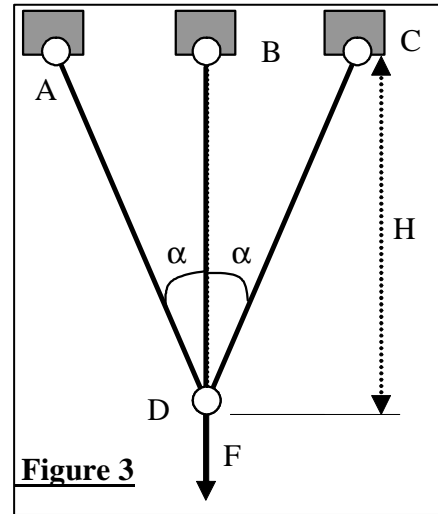


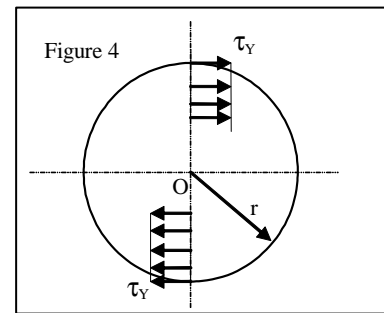
Figure 3

B2 - Analyse limite : Figure 4 (3 points)

Une poutre cylindrique en matériau élastique parfaitement plastique de longueur **L** et de rayon **r**, est soumise aux extrémités à un couple de torsion **T**.

En considérant τ_Y la contrainte tangentielle de début d'écoulement plastique dans une section du matériau, calculer:

- 1- le moment de torsion T_Y du début d'écoulement plastique dans le matériau ;
- 2- le moment limite T_L d'effondrement total de la poutre ;
- 3- Montrer que la réserve de capacité portante est de 33% entre le début d'écoulement plastique et l'effondrement total de la poutre.



B3- Critères de défaillance (plasticité rupture): (3 points)

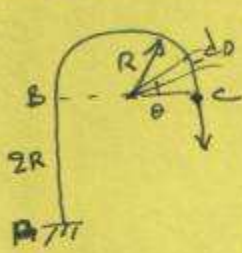
Lors d'un assemblage, la rupture d'une vis au serrage intervient pour un état plan de contraintes:

$\sigma_{xx} = 30$ MPa, $\sigma_{yy} = -50$ MPa, $\sigma_{xy} = -30$ MPa. Déterminer analytiquement ou par le cercle de Mohr:

- 1- les contraintes principales dans la vis,
- 2- les contraintes limites d'écoulement dans la vis suivant les critères de Tresca et de Von Misès.
- 3- Si la contrainte maximale d'écoulement du matériau vaut $\sigma_Y = 300$ MPa, évaluer le coefficient de sécurité η suivant le critère de Tresca ($\eta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_T}$) et suivant le critère de Von Misès ($\eta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{VM}}$).

CORRIGE FINAL MQ41 A10

A1) Énergie de Déformation



$$\begin{aligned} \underline{1)} \quad BC \rightarrow M_f(\theta) &= -PR(1 - \cos\theta) \quad (ds = R d\theta) \\ AB \rightarrow M_f(\theta) &= +2PR \quad (\theta = \pi) \end{aligned}$$

Énergie de déformation $W = \int_0^L \frac{M_f^2}{2EI} dx + \int_0^{\pi} \frac{M_f^2}{2EI} R d\theta$

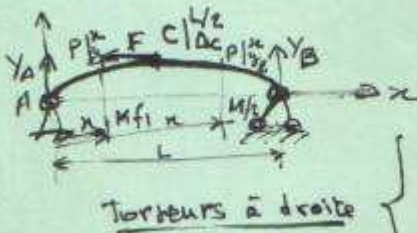
2) Déplacement vertical de C

$$y_c = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} dx + \int_0^{\pi} M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} R d\theta \right\}$$

$$y_c = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^L 2PR(2R) dx + \int_0^{\pi} PR^2(1 - \cos\theta)^2 R d\theta \right\}$$

$$\underline{y_c = \frac{4PR^2L}{EI} + \frac{3PR^3\pi}{2EI}}$$

A2: FLAMBAGE



1) Equilibre: $\begin{cases} X_A = 0, \\ Y_A + Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = -Y_A = -\frac{F}{L} \Delta_c \\ Y_B L + F \Delta_c = 0 \end{cases}$

$C \leq x \leq \frac{L}{2} \Rightarrow \vec{M}_f = \vec{PC} \wedge \vec{FC} + \vec{PB} \wedge \vec{FB} \Rightarrow M_{f1} = F(\Delta_c - y_1) + Y_B(L-x)$
 $M_{f1} = F\left(\frac{x}{L}\Delta_c - y_1\right)$
 $\frac{L}{2} \leq x \leq L \Rightarrow \vec{M}_f = \vec{PB} \wedge \vec{FB} \Rightarrow M_{f2} = -F\Delta_c\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

$EI y_1'' = +M_{f1} \Rightarrow EI y_1'' = +M_{f1} = F\left(\frac{x}{L}\Delta_c - y_1\right), \quad k^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow$

$y_1'' + k^2 y_1 = k^2 \frac{x}{L} \Delta_c \Rightarrow y_1 = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx + \frac{x}{L} \Delta_c$

c.l. $x=0, y_1=0 \Rightarrow A_1 = 0$ (a)

$x = \frac{L}{2}, y_1 = \Delta_c \Rightarrow B_1 \sin \frac{kL}{2} = \frac{\Delta_c}{2} = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{\Delta_c}{2 \sin \frac{kL}{2}}$ (b)

$EI y_2'' = +M_{f2} = -F\Delta_c\left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad k^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow$

$y_2'' = -k^2\left(1 - \frac{x}{L}\right)\Delta_c \Rightarrow y_2 = -k^2\Delta_c\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + A_2 x + B_2$

$$\text{c.l. } x = \frac{L}{2}, y_2 = \Delta_c \Rightarrow A_2 \frac{L}{2} + B_2 - \Delta_c \left(\frac{5k^2 L^2}{48} + 1 \right) = 0 \quad \text{c}$$

$$x = L, y_2 = 0 \Rightarrow A_2 L + B_2 - \Delta_c \frac{k^2 L^2}{3} = 0 \quad \text{d}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_2 = \Delta_c \left(\frac{11}{24} k^2 L - \frac{2}{L} \right) \\ B_2 = \Delta_c \left(2 - \frac{k^2 L^2}{8} \right) \end{cases}$$

Deformées de la poutre:

$$y_1 = \Delta_c \left(\frac{\sin kx}{2 \sin \frac{kL}{2}} + \frac{x}{L} \right)$$

$$y_2 = \Delta_c k^2 L^2 \left\{ \frac{x^3}{6L^3} - \frac{x^2}{2L^2} + \left(\frac{11}{24} - \frac{2}{k^2 L^2} \right) \frac{x}{L} + \frac{2}{k^2 L^2} - \frac{1}{8} \right\}$$

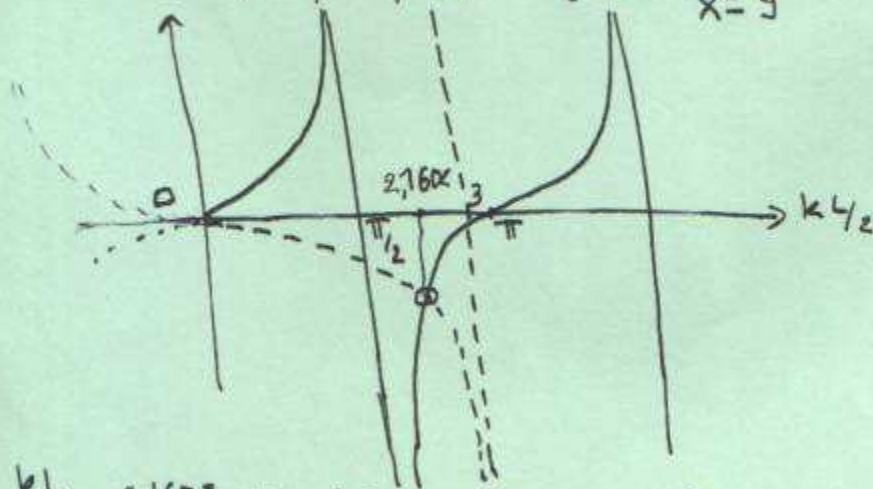
$$3) \text{ Continuité en c, } x = \frac{L}{2} \Rightarrow y_1' = y_2' \quad \begin{cases} y_1' = \frac{\Delta_c k}{2} \cotg \frac{kL}{2} + \frac{\Delta_c}{L} \\ y_2' = \frac{\Delta_c}{L} k^2 L^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{k^2 L^2} \right) \end{cases}$$

$$y_1' = y_2' \Rightarrow \frac{\Delta_c k}{2} \cotg \frac{kL}{2} + \frac{\Delta_c}{L} = \frac{\Delta_c}{L} k^2 L^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{k^2 L^2} \right)$$

$$\cotg \frac{kL}{2} = 2kL \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{k^2 L^2} \right) = \frac{kL}{6} - \frac{6}{kL} = \frac{k^2 L^2 - 36}{6kL}$$

$$\cotg \frac{kL}{2} = \frac{3kL}{k^2 L^2 - 36} \quad \text{QFD}$$

$$4) \text{ Solutions graphiques: } \cotg X = \frac{3X}{X^2 - 9} \quad X = \frac{kL}{2}$$

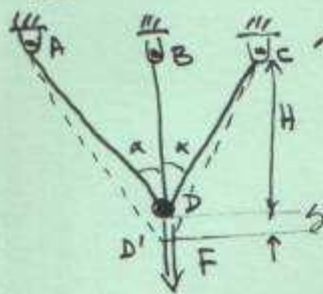


$$\frac{kL}{2} = 2,1602 \Rightarrow \frac{k^2 L^2}{4} = \frac{FL^2}{4EI} = 2,1602^2 = 4,6656 \Rightarrow$$

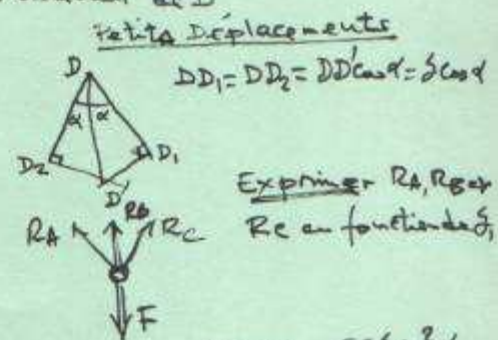
$$F_c = 18,6624 \frac{EI}{L^2} \neq 1,890 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{QFD}$$

B1 Méthode de Rigidité

3



1/ Soit $\delta = DD'$ = déplacement vertical de D
 $\delta = DD' =$ Inconnue
 $AD = CD = \frac{H}{\cos \alpha}$
 $BD = H$



Exprimer R_A, R_B, R_C en fonction de δ

$$\textcircled{a} \begin{cases} R_A = R_C = \frac{ES \delta \cos^2 \alpha}{AD} = \frac{ES \delta \cos^2 \alpha}{H} \\ R_B = \frac{ES \delta \delta'}{H} = \frac{ES \delta}{H} \end{cases}$$

Equilibre de D:

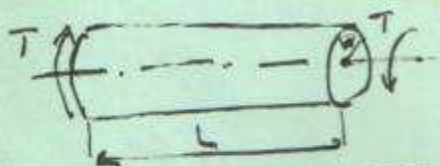
$$2 R_A \cos \alpha + R_B - F = 0 \quad \textcircled{b}$$

$$\textcircled{a} \text{ et } \textcircled{b} \Rightarrow 2 \frac{ES \delta \cos^2 \alpha}{H} + \frac{ES \delta}{H} - F = 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{FH}{ES(1 + 2 \cos^2 \alpha)}$$

2/ Réactions $\parallel R_A = R_C = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha} \parallel R_B = \frac{F}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$

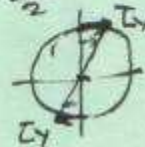
B2: Analyse Limite



1/ $\begin{cases} T = T_y \\ \varphi = \varphi_y \end{cases} \quad \begin{cases} \tau = G \gamma = G r \frac{d\varphi}{dz} \\ \tau = \frac{T}{J} \end{cases} \quad J = \int_0^R r^2 ds = 2\pi \int_0^R r^3 dr$
 Moment polaire $J = \frac{\pi r^4}{2}$

Couple d'écoulement $\parallel T_y = \tau_y \frac{J}{r} = \tau_y \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} \tau_y \textcircled{a}$

Déformation $\parallel \varphi_y = \int_0^L \frac{\tau_y}{GJ} dx = \frac{\tau_y L}{GJ} = \frac{2\pi r^3 L \tau_y}{2G\pi r^4} = \frac{L \tau_y}{G r}$



2/ $T = T_L \quad \varphi \rightarrow \infty$

$\textcircled{b} \parallel T_L = \int_0^r r \cdot \tau_y \cdot ds = \tau_y \int_0^r r (2\pi r) dr = \frac{2\pi r^3}{3} \tau_y$

3/ Comparaison $\Rightarrow \frac{T_L}{T_y} = \frac{2\pi r^3 \tau_y}{3} / \frac{\pi r^3 \tau_y}{2} = \frac{4}{3} = 1,33$

\Rightarrow Réserve de 33% entre le début d'écoulement plastique et l'effondrement total de la poutre COPD

B3 - Critères de Défaillance (Plasticité Rupture)

4

$$1. \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \bar{\sigma} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$1/ \text{ Contraintes principales Analytiquement } \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\ \lambda_2 = \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \end{cases}$$

ou cercle de Mohr

$$\sigma_1 = 40 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -60 \text{ MPa}$$

$$2/ \text{ Critère de TRESCA } \parallel \sigma_T = 2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 = 100 \text{ MPa}$$

$$\text{Critère de Von MISES } \sigma_Y^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_Y^{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = 87,18 \text{ MPa}$$

3/ Coefficient de sécurité η

$$\text{Suivant TRESCA : } \eta = \frac{\sigma_T}{\sigma_T} = \frac{300}{100} = 3$$

$$\text{Suivant Von MISES : } \eta = \frac{\sigma_T}{\sigma_Y^{VM}} = \frac{300}{87,18} = 3,44$$

$$\text{Comparaison } \frac{\sigma_Y^{VM}}{\sigma_T} = \frac{3,44}{3} = 1,15 \quad \text{Ecart de 15\%}$$