P2016 - W. Charon

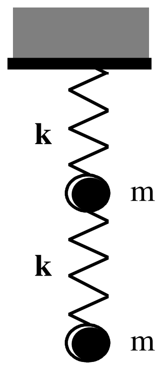
MQ42 - MEDIAN (2 questions = 20 points)

Lundi 25 avril 2016 (08h à 10h)

PARTIE 1 - Questions de cours (10 points)

1. Quelles sont les conditions aux limites du principe de Hamilton tel qu'il a été présenté au cours ? Ces conditions aux limites correspondent-elles à la façon dont les problèmes sont posés généralement ? (0,5 point)
2. Pourquoi les forces intérieures de corps indéformable peuvent-elles être ignorées dans les équations de Lagrange ? (1 point)
3. Dans la formulation qui conduit aux équations de Lagrange $M\ddot{q}+Kq=0$, comment introduit-on le fait que seuls les petits mouvements nous intéressent ? (1,5 point)
4. Admettons avoir exprimé l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système mécanique statique ou hyperstatique en fonction des coordonnées généralisées choisies. Donnez et expliquez le principe de calcul de la valeur des coordonnées généralisées à l'équilibre. (1,5 point)
5. La recherche de solutions particulières au système $M\ddot{q}+Kq=0$ conduit à chercher les solutions propres du système $\left(K-\omega^2 M\right)x=0$. Selon quel principe trouve-t-on les valeurs propres ? (1 point)
6. On considère le système aux caractéristiques propres $\left(K-\omega^2 M\right)x=0$. S'agissant d'un système mécanique, que représente physiquement les valeurs propres et les vecteurs propres ? Aidez-vous d'un exemple. (1,5 point)
7. Considérant les solutions propres du système $\left(K-\omega^2 M\right)x=0$, qu'entend-on par "racine multiple" ? Quelles sont les propriétés des solutions. (1 point)
8. Donnez en justifiant la solution de l'équation des petites oscillations libres pour les conditions initiales $\begin{cases} q_0=\lambda_1 x_{(1)}+\lambda_2 x_{(2)} \\ \dot{q}_0=0 \end{cases}$ (1,5 point)
9. Considérant une poutre allongée fléchissant dans un plan, expliquez ce que l'on entend par effort tranchant. (0,5 point)

PARTIE 2 (4 points)



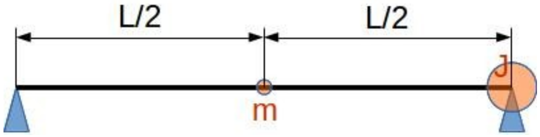
Nous sommes dans le cadre des hypothèses relatives aux vibrations libres des systèmes ayant des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

Trouvez, par des considérations énergétiques, les matrices de masse et de raideur de l'équation du mouvement du système de deux masses représenté ci-contre. Seul un mouvement vertical des masses est permis.

Calculez ensuite les valeurs propres et les vecteurs propres. Vérifiez les propriétés d'orthogonalité. Expliquez en vous aidant d'un schéma ce que signifient physiquement ces modes propres.

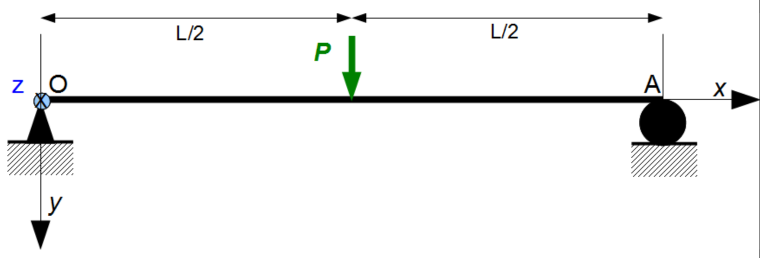
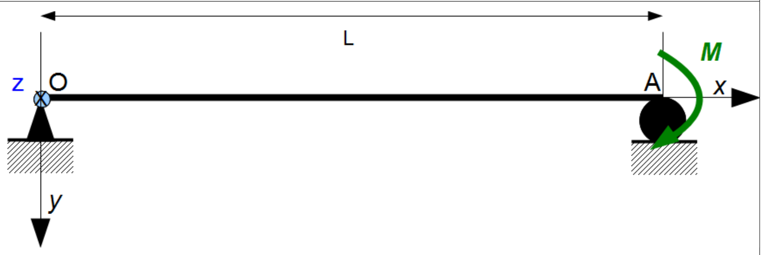
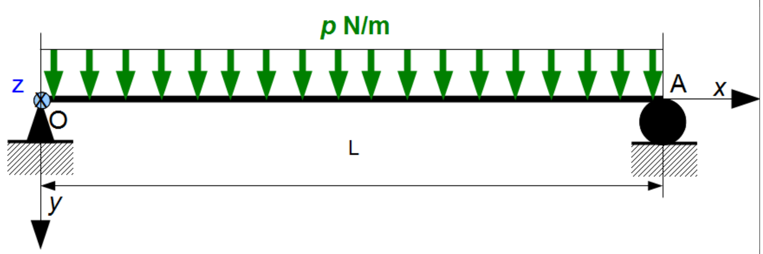
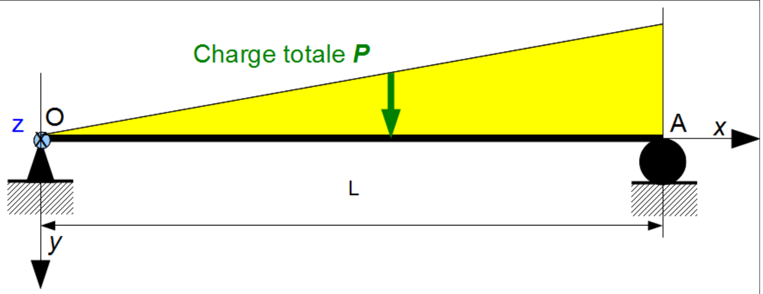
PARTIE 3 : Poutre sans masse propre (6 points)

Soit la poutre bi-appuyée représentée ci-contre. Elle est de longueur L et de module de flexion EI. La poutre ne fléchit que dans le plan du dessin. Une masse m est concentrée en $L/2$ et un solide est fixé à l'extrémité droite. Son inertie est de valeur $J=mL^2/4$ et sa masse est considérée comme négligeable.



Déterminez les équations de Lagrange.

Le tableau ci-dessous devrait vous aider dans la réponse à cette question.

M_{max}	φ	y	
$\frac{PL}{4}$	En O : $\frac{PL^2}{16EI}$ En A : $-\frac{PL^2}{16EI}$	En $x=\frac{L}{2}$: $\frac{PL^3}{48EI}$	
M	En O : $\frac{-ML}{6EI}$ En A : $\frac{ML}{3EI}$	En $x=\frac{L}{2}$: $-\frac{ML^2}{16EI}$	
$\frac{pL^2}{8}$	En O : $\frac{pL^3}{24EI}$ En A : $-\frac{pL^3}{24EI}$	En $x=\frac{L}{2}$: $\frac{5}{384}\frac{pL^4}{EI}$	
$\frac{pL}{9\sqrt{3}}$	En O : $\frac{7PL}{180EI}$ En A : $-\frac{8PL}{180EI}$	En $x=0.5191L$: $0.0130\frac{PL^3}{EI}$	

Quelques résultats relatifs aux poutres bi-appuyées