Date : Vendredi 5 Mai 2017

MQ42 – Mécanique générale et vibratoire

Examen : Médian

NOM : **Prénom :**

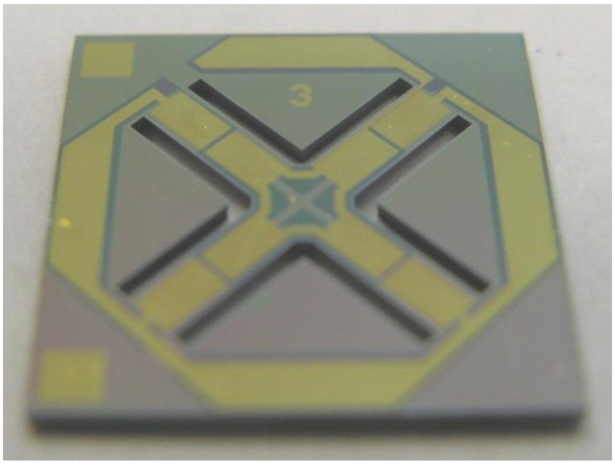
Né(e) le :

Niveau :

Consignes

Aucun document autorisé
Calculatrice autorisée
Smartphones, téléphones, tablettes … interdits.

Le sujet est composé de trois parties indépendantes.
La lecture du sujet est évaluée à 10 minutes.
Les réponses se feront uniquement sur les feuilles du sujet.



Signature :

1. QCM concernant le cours (40 minutes)

Instructions

Il n'y a qu'une seule bonne réponse par question

Une réponse juste = 2 points

Une réponse fausse = -1 point

Aucune réponse = 0 point

1) _____ **Combien de modes propres possède une structure continue ?**
   a. Une dizaine
   b. Une centaine
   c. Un millier
   d. Une infinité

2) _____ **Quelle est l'unité vibratoire usuelle d'un déplacement ?**
   a. mm/s
   b. mm
   c. µm
   d. m/s²

3) _____ **La réponse libre d'un système conservatif du deuxième ordre dépend**
   a. Uniquement du déplacement initial
   b. Du déplacement initial et de la vitesse initiale
   c. Uniquement de la vitesse initiale
   d. Des seuls paramètres de la structure

4) _____ **Laquelle de ces phrases est INCORRECTE**
   a. L'amortissement critique donne le retour à l'équilibre le plus rapide.
   b. Le temps d'arrêt des oscillations permet de déterminer le facteur d'amortissement.
   c. Le régime apériodique apparait pour des facteurs d'amortissement inférieurs à un.
   d. Dans une réponse forcée, le déplacement et la force d'excitation ont la même pulsation.

5) _____ **La vibration est une variation dans le temps d'un paramètre, lié au mouvement, autour**
   a. De zéro
   b. D'un point d'équilibre statique
   c. De la valeur 1
   d. D'une valeur quelconque

Signature :

7) _____ **Un accéléromètre indique qu'une structure vibre harmoniquement à 60 Hz avec une amplitude d'accélération de 1g. L'amplitude de la vitesse est égale à**

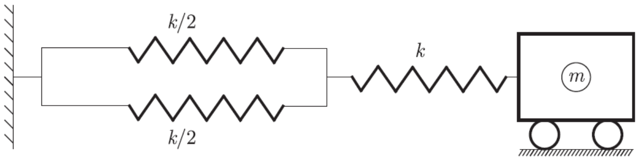
a. 26 mm/s

b. 36 mm/s

c. 46 mm/s

d. 56 mm/s

8) _____ **La pulsation naturelle du système ci-dessous est**



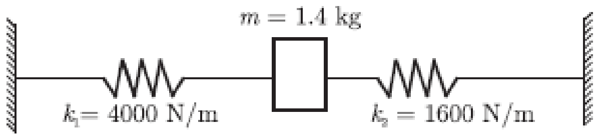
a. $\sqrt{\frac{k}{2m}}$

b. $\sqrt{\frac{k}{m}}$

c. $\sqrt{\frac{2k}{m}}$

d. $\sqrt{\frac{3k}{m}}$

9) _____ **La fréquence naturelle du système « Masse-Ressort » ci-dessous est proche de**



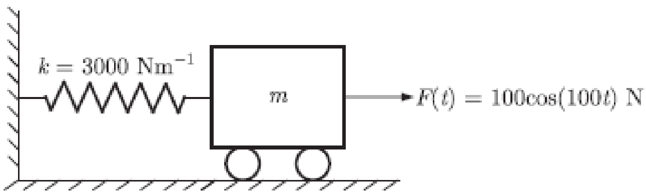
a. 8 Hz

b. 10 Hz

c. 12 Hz

d. 14 Hz

10) _____ **Une masse *m* attachée à un ressort est excitée par une force F(t) (figure ci-dessous). L'amplitude du déplacement observée est de 50 mm. La valeur de *m* est :**



a. 0.1 Kg

b. 1.0 Kg

c. 0.3 Kg

d. 0.5 Kg

Signature :

2. Isolation d'un moteur (50 minutes)

2.1. Dimensionnement initial

Un moteur de masse M et d'inertie J repose sur quatre ressorts comme le montre la Figure 1. Entre les ressorts de raideur k, la distance est de 2a.

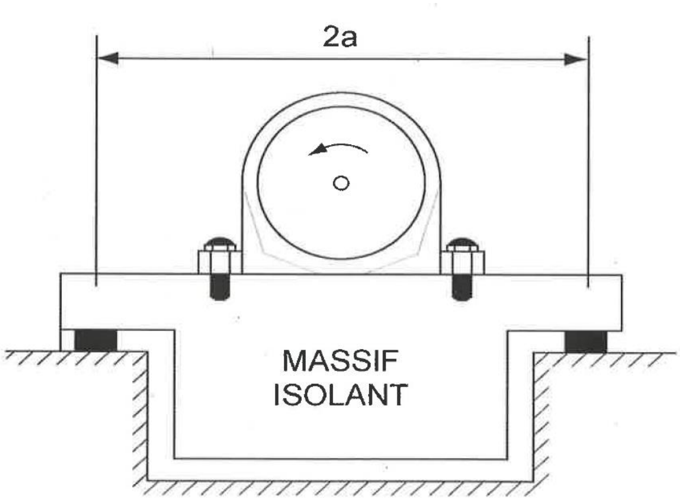


Figure 1 : Isolation de machine tournante

En fonction de k, M, J et a et en supposant qu'il y ait de petites oscillations :

2.1.1. Calculez la fréquence naturelle correspondant au mouvement de suspension.

2.1.2. Calculez la fréquence naturelle correspondant au mouvement de tangage.

Signature :

2.1.3. Si la fréquence naturelle de suspension du système est de 2 Hz, calculez la déflection statique.

2.1.4. Si le facteur d'amortissement est de 20% et la fréquence naturelle de 2 Hz, calculez la réponse vibratoire en translation d'un système soumis à un déplacement initial de 5 cm.

3. Analyse vibratoire d'une micro-structure (20 minutes)

3.1. Hypothèses de travail

Dans le cadre du développement d'une micro-plateforme d'isolation vibratoire, nous souhaitons étudier la signature vibratoire de cette structure. Cette plate-forme est constituée de silicium. Comme montré en Figure 2 et en Figure 3, elle est composée d'une croix parfaitement symétrique au centre de laquelle nous trouvons une structure carrée en surépaisseur destinée à rigidifier le plateau. Le composant électronique à isoler est placé au centre du plateau.

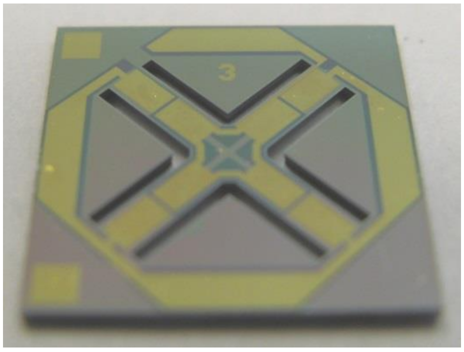


Figure 2 : Vue isométrique de la microstructure (vue du dessus)

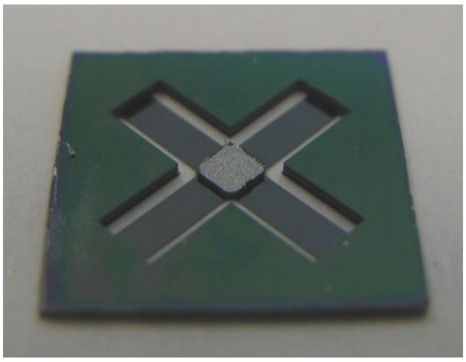


Figure 3 : Vue isométrique de la microstructure (vue du dessus)

Signature :

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Propriétés du silicium :
  - Module d'Young : 131 GPa
  - Masse volumique : 2330 g/cm^3
  - Limité d'élasticité : 7 GPa
  - Taux d'amortissement visqueux typique : 0.1 %
- Paramètres géométriques :
  - Longueur des poutres hors plateau central : 2300 µm
  - Largeur des poutres hors plateau central : 1200 µm
  - Epaisseur des poutres hors plateau central : 50 µm
  - Côté du plateau central : 1600 µm
  - Epaisseur du plateau central : 250 µm
- Masse du composant à isoler : 100 mg

3.2. Dimensionnement de la microstructure

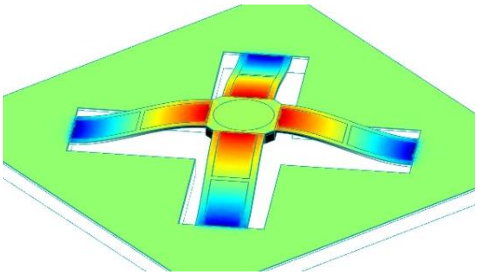


Figure 4 : Visualisation du premier mode de suspension

3.2.1. En considérant le premier mode propre de la structure présentée en Figure 4 et la symétrie de la structure, modélisez le système en un système masse-ressort-amortisseur équivalent.

Signature :

3.2.2. Calculez numériquement la valeur de la première fréquence propre.

3.2.3. Nous supposons que la structure subie une accélération continue de 100g. Calculez l'amplitude maximale de la déflexion de la micro-structure sous cette sollicitation.

3.2.4. On recommande un coefficient de sécurité s=3. A partir des données précédentes, vérifiez la tenue de la structure à la plastification et donc à la rupture (le silicium est un matériau fragile).

Signature :

Annexe 1 : Schéma de résolution analytique

Équation générale (forme canonique)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\varsigma\,\omega_n\,\frac{dx}{dt}+\omega_n^2\,x=a\;g(t)$$

Solution homogène	+	Solution particulière
<u>Équation homogène</u> $\frac{d^2x_h}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dx_h}{dt}+\omega_n^2x_h=0$ $\downarrow$ solution $x_h=\mathrm{Re}\{\tilde{x}_h\}\ avec\ \tilde{x}_h=\tilde{A}e^{st}$ <u>Équation caractéristique</u> $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$ $s=-\omega_n\zeta\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$		<u>Équation complète</u> $\frac{d^2x_p}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dx_p}{dt}+\omega_n^2x_p=ag(t)$ $\downarrow$ chercher x_p sous une forme analogue à celle de $g(t)$. Ainsi si $g(t)$ est la fonction échelon (= constante pour $t>0$), alors nous obtiendrons : $x_p=x(\infty)$

3 CAS

1) $\boxed{\zeta>1}$ Sur amorti	2) $\boxed{\zeta=1}$ Amortissement critique	3) $\boxed{\zeta<1}$ Sous amorti
• 2 racines réelles $x_h=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$ avec $s_1=-\omega_n\zeta+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ $s_2=-\omega_n\zeta-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	• 1 racine double $x_h=(A_1+A_2t)e^{-\omega_nt}$	• 2 racines complexes $\tilde{x}_h=e^{-\alpha t}\left[\tilde{A}_3e^{j\omega_dt}+\tilde{A}_4e^{-j\omega_dt}\right]$ $x_h=\mathrm{Re}\{\tilde{x}_h\}$ $x_h=e^{-\alpha t}\left[A_1\sin\omega_dt+A_2\cos\omega_dt\right]$ ou $x_h=e^{-\alpha t}\ A\cos(\omega_dt+\varphi_0)$ ou $\boxed{x_h=e^{-\alpha t}\ A\sin(\omega_dt+\varphi)}$ avec $\alpha=\omega_n\zeta$ et $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Solution complète : $x=x_h+x_p$ (A_1 et A_2 ou A et φ à déterminer)

Établissement des constantes A_1 et A_2 ou A et φ

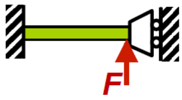
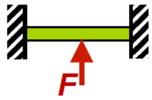
En tenant compte des conditions initiales $x(0^+)\ et\ \frac{dx}{dt}(0^+)$

Dans le cas des systèmes sous-amortis, les constantes A et φ sont établies par les conditions intiales sous la forme suivante :

$$A=\frac{\sqrt{(\dot{x}(0)+\xi\omega_n x(0))^2+(\omega_d x(0))^2)}}{\omega_d}\qquad \text{et } tan\varphi=\frac{\omega_d x(0)}{(\dot{x}(0)+\xi\omega_n x(0))}$$

Signature :

Annexe 2 : Raideur d'une poutre à section rectangulaire

Poutre encastrée/libre	Poutre encastrée/ guidée	Poutre encastrée/ encastrée
		
$y = \frac{4L^3}{EhW^3} F_y$	$y = \frac{L^3}{EhW^3} F_y$	$y = \frac{L^3}{16EhW^3} F_y$
$k = Eh \frac{w^3}{4l^3}$	$k = Eh \frac{w^3}{l^3}$	$k = 16Eh \frac{w^3}{l^3}$

y

Avec

- l : Longueur de la poutre, (m),
- w : Epaisseur de la poutre (m),
- h : Largeur de la poutre (m).

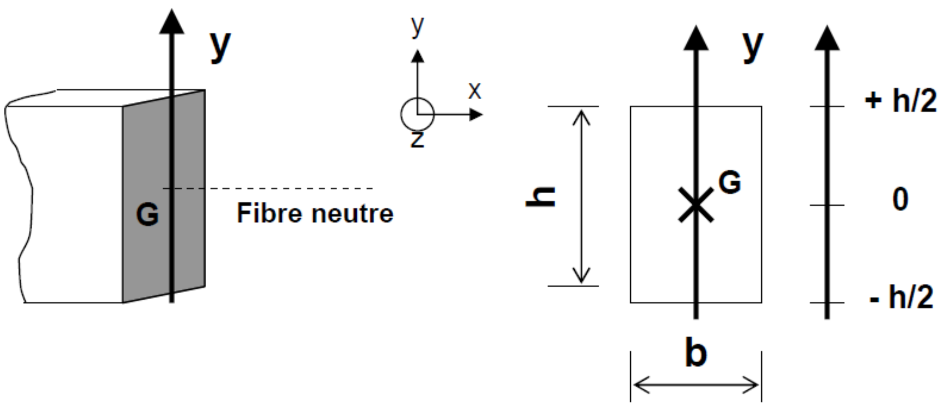
Annexe 3 : Contrainte normale

- **Expression générale de la contrainte normale : (flexion simple ou flexion pure)**

$$\sigma = -\frac{\mathbf{Mf}(x)}{\mathbf{I}} \times y$$

avec :

- **I** : le moment quadratique calculé par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité de la section, perpendiculairement au chargement.
- **Mf(x)** : la valeur maxi du moment fléchissant dans la section étudiée.
- **y** : variable représentant la cote algébrique entre la fibre neutre et les fibres extrêmes (supérieure et inférieure) de la section.



En flexion simple, lorsque la section est symétrique, la fibre neutre passe par le centre de gravité. Ainsi, **y** variera toujours de la valeur de – h/2 à la valeur de + h/2.

Signature :