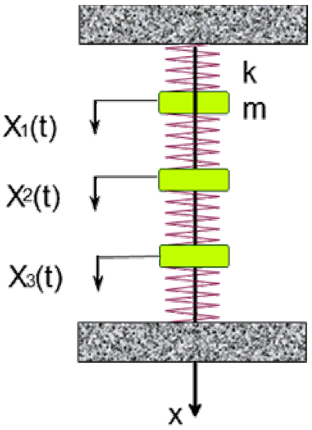
MQ43 - FINAL
Janvier 2012

Aucun document autorisé

EXERCICE 1

On considère une structure assimilable à la mise en série de 3 systèmes « masse+ressort » identiques, encastrés aux extrémités (voir figure).



Le PFD appliqué à chaque masse permet d'écrire :

$$\begin{cases} m.x1''+2k.x1-k.x2=0 \\ m.x2''-k.x1+2k.x2-k.x3=0 \\ m.x3''-k.x2+2k.x3=0 \end{cases}$$

Travail demandé :

❶ Déterminer la matrice des masses $\overline{\overline{M}}$ et la matrice des raideurs $\overline{\overline{K}}$ de ce problème.

❷ Pour les deux premiers modes propres on choisit comme vecteurs propres :

$$\vec{a}1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

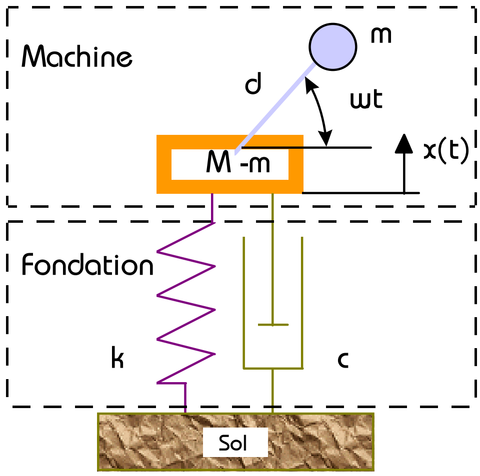
A l'aide d'un croquis justifier ce choix.

❸ Calculer $\overline{\overline{M}}*$ et $\overline{\overline{K}}*$ les matrices des masses et des raideurs réduites.

❹ Déterminer alors les deux premières fréquences propres approchées de cette structure par la méthode de RAYLEIGH-RITZ.

EXERCICE 2

Un socle ainsi que la couche élastique qui le supporte appelée fondation (sol, béton ou acier de construction...) forment un système oscillant susceptible de diminuer sensiblement la transmission des vibrations émises par une machine.
On appelle k la raideur et c le coefficient d'amortissement de la fondation. Le sol sur lequel repose la fondation est supposé parfaitement rigide et immobile.
La machine concernée de masse M-m est principalement constituée d'un rotor comportant un balourd de masse m tournant à la vitesse angulaire ω et situé à une distance d de l'axe de rotation.
On suppose que le mouvement de la machine n'est possible que suivant l'axe vertical, il est repéré par x(t) à partir de la position d'équilibre statique.
En considérant la machine et sa fondation on arrive à la modélisation suivante:



Travail demandé :

❶ On montre que l'équation différentielle du mouvement de la machine peut s'écrire:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varepsilon\omega o\frac{dx}{dt} + \omega o^2 x = \frac{md}{M}\omega^2\sin(\omega t)$$

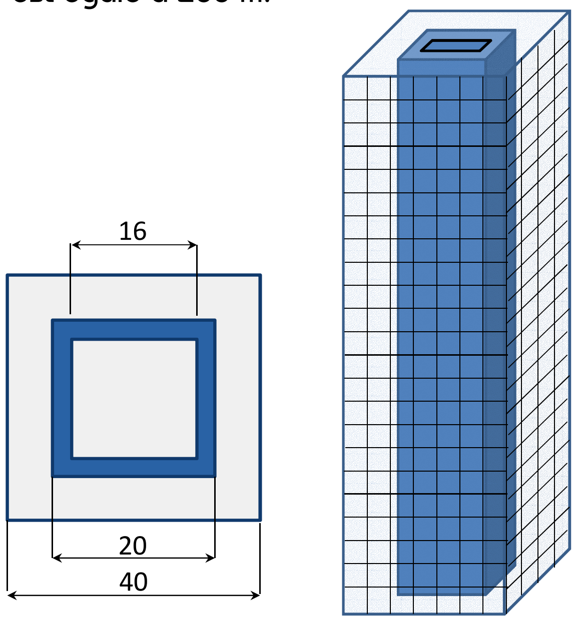
avec $\omega o^2 = k/M$, $\varepsilon = c/cr$ et $cr = 2.M.\omega o$.

On néglige le mouvement transitoire et on ne s'intéresse qu'au mouvement forcé en cherchant une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme $x(t) = X.\sin(\omega.t - \varphi)$.
Déterminer l'amplitude X du mouvement et en posant $\tau = \omega/\omega o$, montrer que:

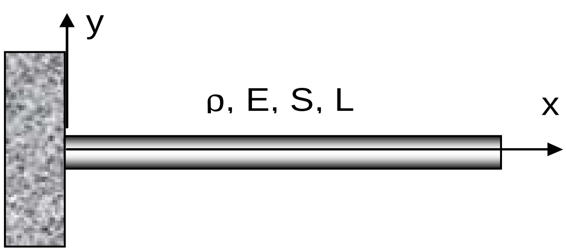
$$X = \frac{m \cdot d}{M} \cdot \frac{\tau^2}{\sqrt{(1-\tau^2)^2 + 4.\varepsilon^2.\tau^2}}$$

EXERCICE 3

La figure suivante montre la structure d'un gratte-ciel. La partie résistante est composée d'un noyau en béton armé. Ce noyau est une tour carrée creuse de 20 m de côté et de 2 m d'épaisseur. La hauteur de la tour est égale à 200 m.



Pour étudier les vibrations **longitudinales** de la tour, son noyau structurel est modélisé comme une poutre **encastrée-libre** de masse volumique ρ, de module d'Young E , de section S et de longueur , de module d'Young E , de section S et de longueur L.



Pour mémoire, la solution spatio-temporelle retenue dans ce type de problème est de la forme :

$$u(x,t) = [A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)]\left[C.\sin(\omega.\sqrt{\frac{\rho}{E}}.x) + D.\cos(\omega.\sqrt{\frac{\rho}{E}}.x)\right]$$

Travail demandé :

❶ Que valent :
- $u(0,t)$?
- $N(L,t)$?

❷ On rappelle la relation de RDM : $N(x,t) = E.S.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

Montrer que l'équation permettant de déterminer les fréquences propres de la tour est $\cos(\omega.\sqrt{\frac{\rho}{E}}.L) = 0.$

❸ Déterminer les 2 premières fréquences propres de vibrations transversales de la tour sachant que :
$\rho = 2500$ kg/m^3
E = 30 GPa
L = 200 m

EXERCICE 4

Le système différentiel suivant décrit les vibrations d'une structure selon deux mouvements $\alpha(t)$ et $\theta(t)$ où a, b, c, d et e sont des constantes dont les valeurs peuvent être ajustées à loisir.

$$\begin{cases} a\alpha'' + b\alpha + c\theta = 0 \\ d\theta'' + e\theta + c\alpha = 0 \end{cases}$$

Travail demandé :

Faire une proposition pour découpler les mouvements $\alpha(t)$ et $\theta(t)$ et pour que chaque mouvement atteigne la résonance à la même fréquence.