MQ43 - Automne 2012
FINAL

Exercice 1 :

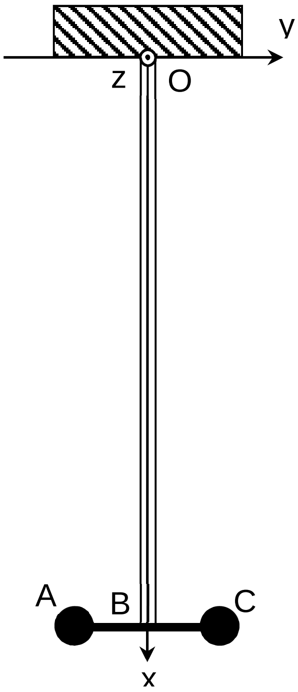


Fig. 1 : Poutre et masses.

La Fig. 1 ci-contre représente un système mécanique constitué de :

- Une poutre verticale torsible OB, encastrée au point O.
- Un barreau horizontal ABC, qui peut être considéré comme indéformable.
- 2 masses positionnées en A et B, qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

Les masses de la poutre OB et du barreau ABC sont négligeables par rapport aux masses ponctuelles en A et C.

Données :

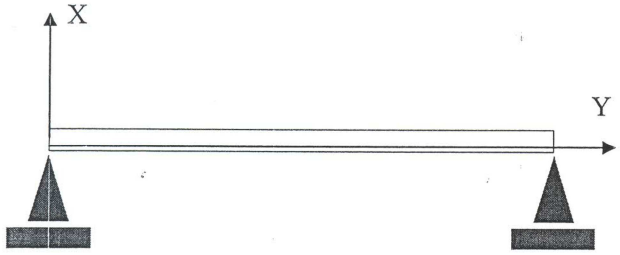
- K : rigidité en torsion de la poutre OB.
- a : distance AB ou BC (B est le centre du barreau ABC).
- M : valeur de chacune des 2 masses.

Une rotation θ_0 autour de l'axe Ox est imposée au barreau ABC, grâce à un moment appliqué en B.
A l'instant t = 0, ce moment disparaît et le barreau ABC commence à osciller, avec une vitesse initiale nulle.

1. Quel est le moment qui agit sur le solide ABC (barreau et masses) à un instant ultérieur t > 0 ?
2. Quelle est l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement, supposé non-amorti ?
3. Résoudre cette équation différentielle et donner l'équation du mouvement de rotation du barreau ABC.
4. Quelle est la fréquence de ces oscillations libres ?
5. Calculer numériquement cette fréquence pour K = 100 N.m, a = 100 mm et M = 5 kg.

Exercice 2 :

On étudie les vibrations verticales d'une dalle d'un bâtiment qu'on assimile à une poutre en béton. Pour simplifier cet élément est considéré comme appuyée aux extrémités sur les murs porteurs (voir la figure ci-dessous)



Pour mémoire, la fonction spatiale retenue dans ce type de problème est de la forme :

a(y)=Csin(Xy) + Dcos(Xy) + Esh(Xy) + Fch(Xy) avec $X = \sqrt[4]{\frac{\rho s \omega^2}{EI}}$

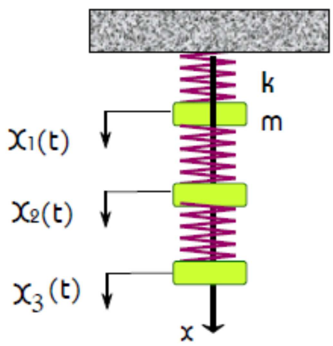
où S est la section de la poutre, ρ sa masse volumique, E le module de Young et I le moment quadratique de la pulsation. La pulsation d'excitation est notée ω.

1. Ecrire les conditions aux limites imposées par ce problème
2. Ecrire l'équation vérifiée par X permettant d'éviter la solution a(y) = 0
3. En déduire les 2 premières fréquences propres de résonance des vibrations de la poutre si :
   - ρ= 2500 kg.m^{-3}
   - E = 35 GPa
   - S = 0,04 m^2
   - I = 0,0001 m^4
   - L=10 m

Rappel de RDM : $EI\frac{\partial^2_u}{\partial y^2} = Mf$

Exercice 3 :

On considère une structure assimilable à la mise en série de 3 systèmes identiques « masse+ressort».



1. Ecrire à l'aide du PFD le système de 3 équations différentielles qui décrit les oscillations de la structure.
2. Déterminer la matrice des masses $\overline{\overline{M}}$ et la matrice des raideurs $\overline{\overline{K}}$de ce problème.
3. Pour les deux premiers modes propres on choisit comme vecteurs propres :

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ et \ a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   A l'aide d'un croquis justifier ce choix.
4. Calculer $\overline{\overline{M}}^* \ et \ \overline{\overline{K}}^*$ les matrices des masses et des raideurs réduites.
5. Déterminer alors les deux premières fréquences propres approchées de cette structure par la méthode de RAYLEIGH-RITZ.