MQ43 - Automne 2013
Sujet de l'Examen FINAL
15/01/2014

Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Tension et longueur d'une corde de guitare

1.1. Rappeler la formule du cours donnant la première pulsation propre d'une corde de longueur L et de masse linéique µ, soumise à une tension T.

1.2. En déduire la formule qui donne la tension T à appliquer à cette corde pour que sa fréquence propre fondamentale N_{01} prenne une valeur souhaitée.

1.3. L = 650 mm et µ = 0,4 g/m.
Quelle doit être la tension T pour obtenir N_{01} = 330 Hz ?

1.4. La tension de la corde étant celle qui a été calculée à la question précédente, quelle doit être sa nouvelle longueur L' pour que sa fréquence propre fondamentale prenne la nouvelle valeur N'_{01} = 350 Hz ?

2. Vibrations d'une masse ponctuelle reliée à 2 ou 3 ressorts

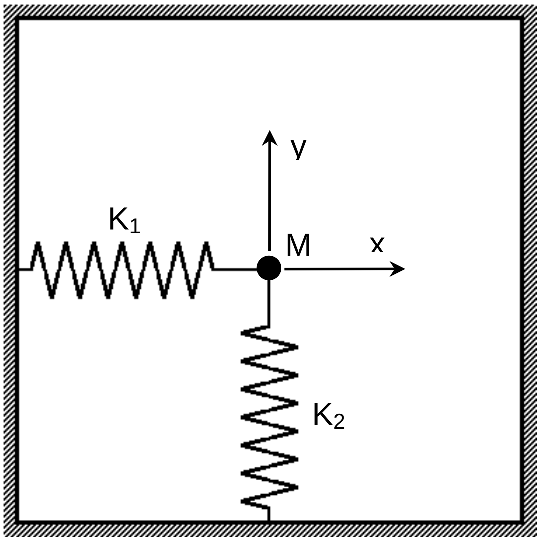

Fig. 1 : La masse, le bâti et les 2 ressorts.

Une masse ponctuelle M est reliée à un bâti fixe par 2 ressorts, de rigidités K_1 et K_2, conformément à la Fig. 1.
Les déplacements de la masse sont suffisamment petits pour que les directions des efforts que lui appliquent les ressorts puissent être considérées comme fixes.
La masse ne peut se déplacer que dans un plan, autour du point (x,y) = (0,0), qui est sa position à l'état statique.

2.1. Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?

2.2. Ces degrés de liberté sont-ils couplés ?

2.3. Exprimer les efforts que les 2 ressorts exercent sur la masse quand elle occupe une position (x,y) quelconque, différente de (0,0).

MQ43 - Automne 2013
Sujet de l'Examen FINAL
15/01/2014

2.4. En appliquant le théorème de la résultante dynamique, écrire les 2 équations différentielles qui régissent les mouvements vibratoires de la masse M lorsqu'elle est soumise à l'action des 2 ressorts, après avoir été écartée de sa position statique.

2.5. Résoudre ces équations différentielles et déterminer les pulsations propres du système.

2.6. Expérimentation 1 : la masse M est placée en (x,y) = (a,0), puis libérée sans vitesse initiale, à l'instant t = 0.
Donner les équations de sa trajectoire ultérieure, sous la forme x(t) = …, y(t) = …

2.7. Expérimentation 2 : la masse M est placée en (x,y) = (a,-a), puis libérée sans vitesse initiale, à l'instant t = 0.
Donner les équations de sa trajectoire ultérieure, sous la forme x(t) = …, y(t) = …

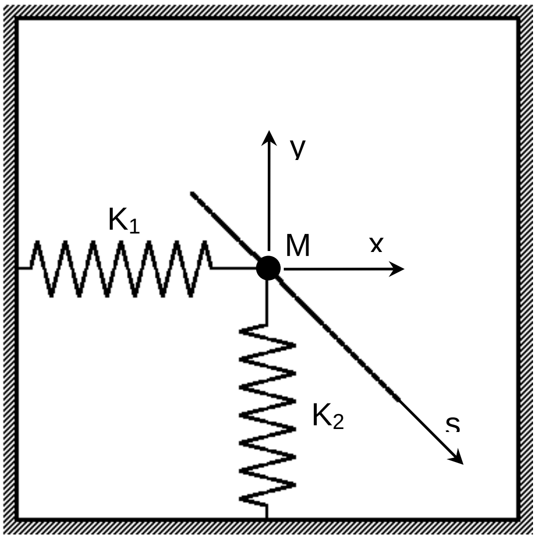

Fig. 2 : La masse, le bâti, les 2 ressorts et la glissière.

En plus des 2 ressorts, la masse ponctuelle M est maintenant liée à une glissière parfaite, qui fait un angle de 45° avec les axes x et y, conformément à la Fig. 2.
Ce qui fait que les coordonnées x et y de la masse ne sont plus indépendantes, mais obéissent à l'équation x = -y.

2.8. Combien de degrés de liberté le système possède-t-il maintenant ?

2.9. La position de la masse sur la glissière est repérée par le paramètre s (voir Fig. 2).
Ecrire l'équation différentielle qui régit les mouvements vibratoires de la masse M le long de la glissière, lorsqu'elle est soumise à l'action des 2 ressorts, après avoir été écartée de sa position statique.
La fonction inconnue de cette équation est s(t).

2.10. Résoudre cette équation différentielle et déterminer la pulsation propre du système.

2.11. Expérimentation 3 : le long de la glissière, la masse M est placée en (x,y) = (a,-a), puis libérée sans vitesse initiale, à l'instant t = 0.
Donner les équations de sa trajectoire ultérieure, sous la forme x(t) = …, y(t) = …

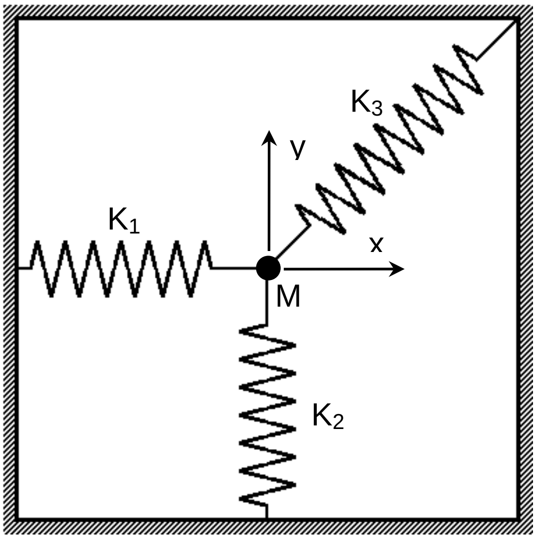

Fig. 3 : La masse, le bâti et les 3 ressorts.

La masse ponctuelle M est maintenant reliée au bâti fixe par 3 ressorts, de rigidité K_1, K_2 et K_3, la direction du 3ème ressort faisant un angle de 45° par rapport aux axes x et y, conformément à la Fig. 3.
La glissière a été démontée.
Les déplacements de la masse sont toujours suffisamment petits pour que les directions des 3 efforts que lui appliquent les 3 ressorts puissent être considérées comme fixes.

2.12. Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?

2.13. Ces degrés de liberté sont-ils couplés ?

2.14. A l'aide d'un croquis, montrer que lorsque la masse M occupe une position (x,y), la variation de longueur du 3ème ressort est de $-\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$.

2.15. En déduire l'expression de l'effort exercé par ce 3ème ressort sur la masse M, appliquer le théorème de la résultante dynamique et écrire les 2 équations différentielles qui régissent les mouvements vibratoires de la masse M lorsqu'elle est soumise à l'action des 3 ressorts, après avoir été écartée de sa position statique.

2.16. Exprimer ce système sous forme matricielle et déterminer les pulsations propres du système.

2.17. Lorsque $K_3 = 0$ et en supposant $K_1 < K_2$, vérifier que le résultat de la question 2.5 est retrouvé.

2.18. Quelle situation retrouve-t-on lorsque K_3 tend vers l'infini ?
Vérifier la cohérence des résultats.