12/01/15

MQ43 - A 2014

Examen final - Corrigé

1.1 Efforts exercés sur le 1er chariot (à gauche) par les 2 ressorts :

$$-Kx_1 - \alpha K(x_1 - x_2)$$

Effort exercé sur le 2ème chariot par le ressort central :

$$-\alpha K(x_2 - x_1)$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué aux 2 chariots : $\sum F = M x_i''$ (avec $i = 1$ ou 2)

$$\boxed{\begin{cases} Mx_1'' + Kx_1(1+\alpha) - K\alpha x_2 = 0 \\ Mx_2'' - K\alpha x_1 + K\alpha x_2 = 0 \end{cases}}$$

1.2 Écriture matricielle du système d'équations :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K(1+\alpha) & -K\alpha \\ -K\alpha & +K\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \frac{K}{M}\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ doivent satisfaire à :

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha-\lambda & -\alpha \\ -\alpha & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1+\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda) - \alpha^2 = 0$$

$$\alpha + \alpha^2 - \lambda\alpha - \lambda - \lambda\alpha + \lambda^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(1+2\alpha) + \alpha = 0$$

Racines : $\lambda_i = \frac{1}{2}\left(1+2\alpha \pm \sqrt{(1+2\alpha)^2 - 4\alpha}\right)$ avec $i = 1$ ou 2

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\left(1+2\alpha \pm \sqrt{1+4\alpha^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{10}^2 &= \frac{K}{2M}\left(1+2\alpha - \sqrt{1+4\alpha^2}\right) \\ \omega_{20}^2 &= \frac{K}{2M}\left(1+2\alpha + \sqrt{1+4\alpha^2}\right) \end{aligned}}$$

1.4

$$\begin{cases} x_1''(t) = -x_{10}\,\omega^2 \cos(\omega t) \\ x_2''(t) = -x_{20}\,\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1''(t) &= -\omega^2 x_1(t) \\ x_2''(t) &= -\omega^2 x_2(t) \end{aligned}}$$

$\boxed{1.5}$ Voir 1.1 en ajoutant $F(t)$ aux efforts agissant sur le 1er chariot (à gauche).

$$\boxed{\begin{cases} M x_1'' + K x_1 (1+\alpha) - K\alpha x_2 = F(t) \\ M x_2'' - K\alpha x_1 + K\alpha x_2 = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{1.6}$ $x_1 = x_{10} \cos(\omega t)$ $\qquad x_1'' = -x_{10}\,\omega^2 \cos(\omega t)$

$x_2 = x_{20} \cos(\omega t)$ $\qquad x_2'' = -x_{20}\,\omega^2 \cos(\omega t)$

$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

$\cos(\omega t)$ disparaît des 2 équations.

$$\boxed{\begin{cases} \left[-M\omega^2 + K(1+\alpha)\right] x_{10} - K\alpha x_{20} = F_0 \\ -K\alpha x_{10} + \left(-M\omega^2 + K\alpha\right) x_{20} = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{1.7}$ La 2ème équation permet d'exprimer x_{20} en fonction de x_{10}.

$$x_{20} = \frac{K\alpha}{K\alpha - M\omega^2}\, x_{10}$$

La 1ère équation donne alors x_{10}.

$$\left(\left[K(1+\alpha) - M\omega^2\right] x_{10} - \frac{K^2\alpha^2}{K\alpha - M\omega^2} \right) x_{10} = F_0$$

$$\frac{K^2\alpha(1+\alpha) - M\omega^2\left[K\alpha + K(1+\alpha)\right] + M^2\omega^4 - K^2\alpha^2}{K\alpha - M\omega^2}\, x_{10} = F_0$$

$$x_{10} = F_0 \frac{K\alpha - M\omega^2}{K^2\alpha - M\omega^2 K(1+2\alpha) + M^2\omega^4}$$

En posant $X = \dfrac{M\omega^2}{K}$

$$\boxed{x_{10} = -\frac{F_0}{K}\,\frac{X-\alpha}{X^2 - X(1+2\alpha)+\alpha}}$$

1.8 $\omega^2 = 0$ Effort statique

$$\boxed{x_{10} = \frac{F_0}{K}}$$

1.9 Rappel question 1.3.

$\dfrac{M\omega_{01}^2}{K}$ et $\dfrac{M\omega_{02}^2}{K}$ sont les racines λ_1 et λ_2 de l'équation

$$\lambda^2 - \lambda(1+2\alpha) + \alpha = 0$$

Donc, si $\omega^2 \longrightarrow \omega_{01}^2$ ou ω_{02}^2

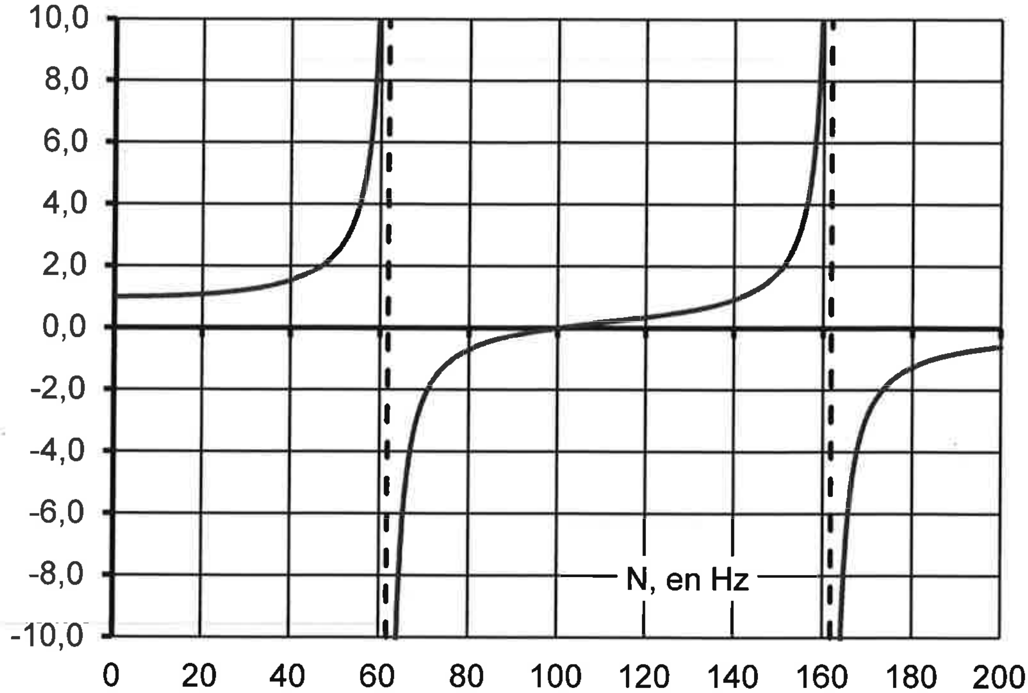
$$X^2 - X(1+2\alpha) + \alpha \longrightarrow 0$$

$$\boxed{x_{10} \longrightarrow \pm\infty}$$

1.10 $\omega^2 = \dfrac{\alpha K}{M} \longrightarrow X = \alpha$

$\boxed{x_{10} = 0}$ Antirésonance

1.11 $\omega^2 \longrightarrow +\infty$ $X \longrightarrow +\infty$ $\boxed{x_{10} \longrightarrow 0}$



1.12 Voir le graphe ci-dessus, donnant x_{10} en fonction de la fréquence d'excitation N, avec les valeurs numériques des questions 1.14 et 1.15.

1.13 $\alpha = 0$ $\quad x_{10} = -\dfrac{F_0}{K}\left(\dfrac{1}{X-1}\right) = -\dfrac{F_0}{K}\left(\dfrac{1}{\frac{M\omega^2}{K}-1}\right)$

$$\boxed{x_{10} = \frac{F_0}{K - M\omega^2}}$$

1.14 $K = M\omega^2 + \dfrac{F_0}{x_{10}}$

$$\boxed{K = 4{,}048 \cdot 10^4 \text{ N/m}}$$

1.15 $x_{10} = 0$ pour $\alpha = \dfrac{M\omega^2}{K}$ (question 1.10) $\rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}98}$

2.1

Cours : $\omega_{0i} = \frac{i\pi}{L}\sqrt{\frac{T_T}{\mu}}$

$\omega_{01} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T_T}{\mu}}$ et $N_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi}$

$$\boxed{N_{01} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_T}{\mu}}}$$

2.2

$N_{01}^2 = \frac{1}{4L^2}\frac{T_T}{\mu}$

$T_T = 4\mu L^2 N_{01}^2$

Poids du sac : $P = 2T_T$

$$\boxed{P = 8\mu L^2 N_{01}^2}$$

2.3

$P = 8 \times 0{,}05 \times 2^2 \times 25^2$

$$\boxed{P = 1000\ N}$$

2.4

$N_{01}'^2 = \frac{1}{4H^2}\frac{T_S}{\mu}$

$$\boxed{H = \frac{1}{2N_{01}'}\sqrt{\frac{T_S}{\mu}}}$$

2.5

$T_S = P = 1000\ N$ $\qquad H = \frac{1}{2\times 20}\sqrt{\frac{1000}{0{,}05}}$

$$\boxed{H = 3{,}53\ m}$$