**MQ43 - Automne 2014**
**Sujet de l'Examen FINAL**
**13/01/2015**

Durée : 2 h - Documents autorisés

**Conseils et consignes**

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

## 1. Système oscillant à 2 masses identiques et 2 ressorts différents

2 chariots de même masse M sont liés à 2 ressorts de rigidités différentes, notées K et α K (voir Fig. 1), α étant un nombre réel strictement positif.
Les positions de ces 2 chariots sur l'axe des x sont repérées par les paramètres $x_1$ et $x_2$, nuls lorsque le système est au repos.

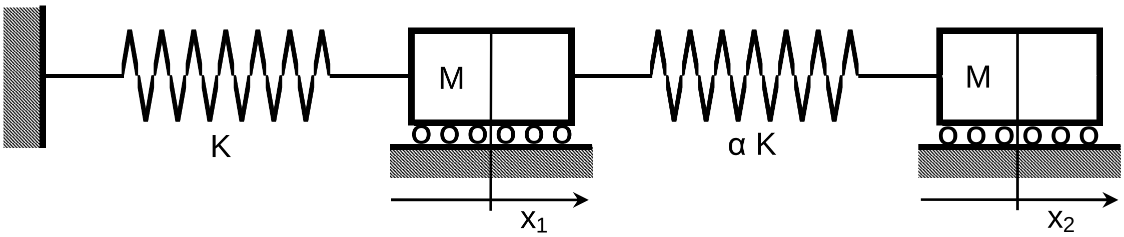


Fig. 1 : Le système considéré.

1.1. Faire le bilan des forces qui agissent sur chacun des chariots lorsque $x_1$ et $x_2$ prennent des valeurs quelconques, appliquer à chacun des chariots le théorème de la résultante dynamique et écrire le système d'équations différentielles à satisfaire.

1.2. Montrer que ce système peut s'écrire de façon matricielle, sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \frac{K}{M}\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Diagonaliser la matrice A et en déduire les expressions des carrés des 2 pulsations propres du système, notés $\omega_{01}^2$ et $\omega_{02}^2$.

L'un des chariots est maintenant soumis à un effort variant sinusoïdalement avec le temps, conformément à la Fig. 2.
Le but de la suite de l'exercice est de déterminer l'amplitude du déplacement $x_1(t)$ lorsqu'un mouvement périodique est établi, en fonction de la pulsation ω de l'effort, qui s'écrit :
$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$
Il est admis que les déplacements des 2 chariots sont alors de la forme suivante, où $x_{10}$ et $x_{20}$ peuvent être positifs ou négatifs :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \cos(\omega t) \\ x_2(t) = x_{20} \cos(\omega t) \end{cases}$$

**MQ43 - Automne 2014**
**Sujet de l'Examen FINAL**
**13/01/2015**

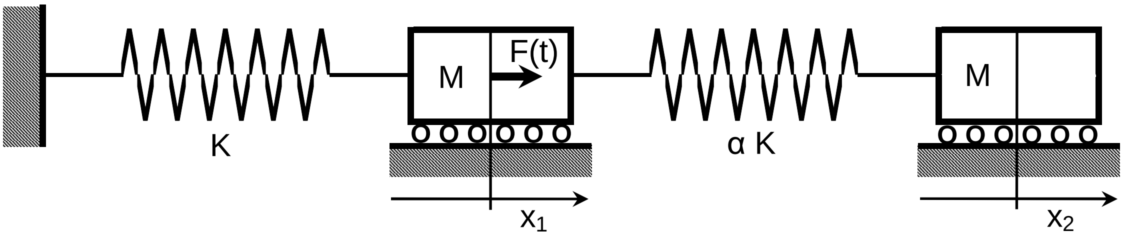


Fig. 2 : Un effort F(t) est appliqué à l'un des chariots.

1.4. Exprimer les accélérations $x_1''(t)$ et $x_2''(t)$ en fonction des positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1.5. Refaire le bilan des forces qui agissent sur chacun des chariots lorsque $x_1$ et $x_2$ prennent des valeurs quelconques, en incluant l'effort $F(t)$, appliquer à chacun des chariots le théorème de la résultante dynamique et écrire le système d'équations différentielles à satisfaire.

1.6. Réécrire ce système en tenant compte des expressions de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $F(t)$ données ci-dessus.

1.7. Montrer que l'amplitude du déplacement du chariot sur lequel s'applique l'effort est donnée par : $x_{10} = -\frac{F_0}{K}\left(\frac{X-\alpha}{X^2 - X\,(2\,\alpha+1)+\alpha}\right)$, avec $X = \frac{M\,\omega^2}{K}$

1.8. Quelle est la valeur de $x_{10}$ si $\omega^2 = 0$ ?

1.9. Que devient $x_{10}$ si $\omega^2$ tend vers $\omega_{01}^2$ ou $\omega_{02}^2$, calculés à la question 1.3 ?

1.10. Quelle est la valeur de $x_{10}$ si $\omega^2 = \frac{\alpha\,K}{M}$ ?

1.11. Que devient $x_{10}$ si $\omega^2$ tend vers l'infini ?

1.12. Compte tenu des réponses aux questions précédentes, tracer schématiquement le graphe des évolutions de $x_{10}$ en fonction de $\omega^2$.

Un élément de machine électrique peut être modélisé par le système de la Fig. 2.
La fréquence de l'effort F(t) appliqué est de 100 Hz, sa valeur maximale $F_0$ est de 1000 N.
La masse M de chacun des chariots est de 100 kg.
Sans liaison élastique entre les 2 chariots, l'amplitude des déplacements $x_{10}$ est de 1 mm, ce qui est inacceptable.

1.13. S'il n'y a pas de ressort entre les 2 chariots, la formule donnée à la question 1.7 reste valable avec α = 0.
Comment s'exprime alors l'amplitude $x_{10}$ ?

1.14. Quelle est la valeur numérique de la rigidité K ?

1.15. Si une liaison élastique est mise en place entre les 2 chariots (α ≠ 0), quelle est la valeur de α qui permettra de minimiser les déplacements vibratoires ?

**MQ43 - Automne 2014**
**Sujet de l'Examen FINAL**
**13/01/2015**

## 2. Toto pèse son sac

A l'occasion de notre examen médian, nous avons découvert la poulie astucieuse de Toto (Fig. 3).
Nous avons vu que, lorsque le sac est immobile, la tension $T_T$ de la corde sur laquelle tire Toto est égale à la moitié de la tension $T_S$ de la corde à laquelle est suspendu le sac.
Toto connaît la longueur L de la corde sur laquelle il tire et sa masse linéique µ.
Il a l'idée ingénieuse d'estimer la tension $T_T$ en faisant vibrer la corde sur son premier mode. Il demande donc à sa petite sœur de tirer légèrement sur le centre de la corde, perpendiculairement à sa direction, puis de relâcher.
Musicien averti, il est capable d'entendre la valeur de la fréquence propre fondamentale $N_{01}$ de la corde tendue lorsqu'elle vibre.

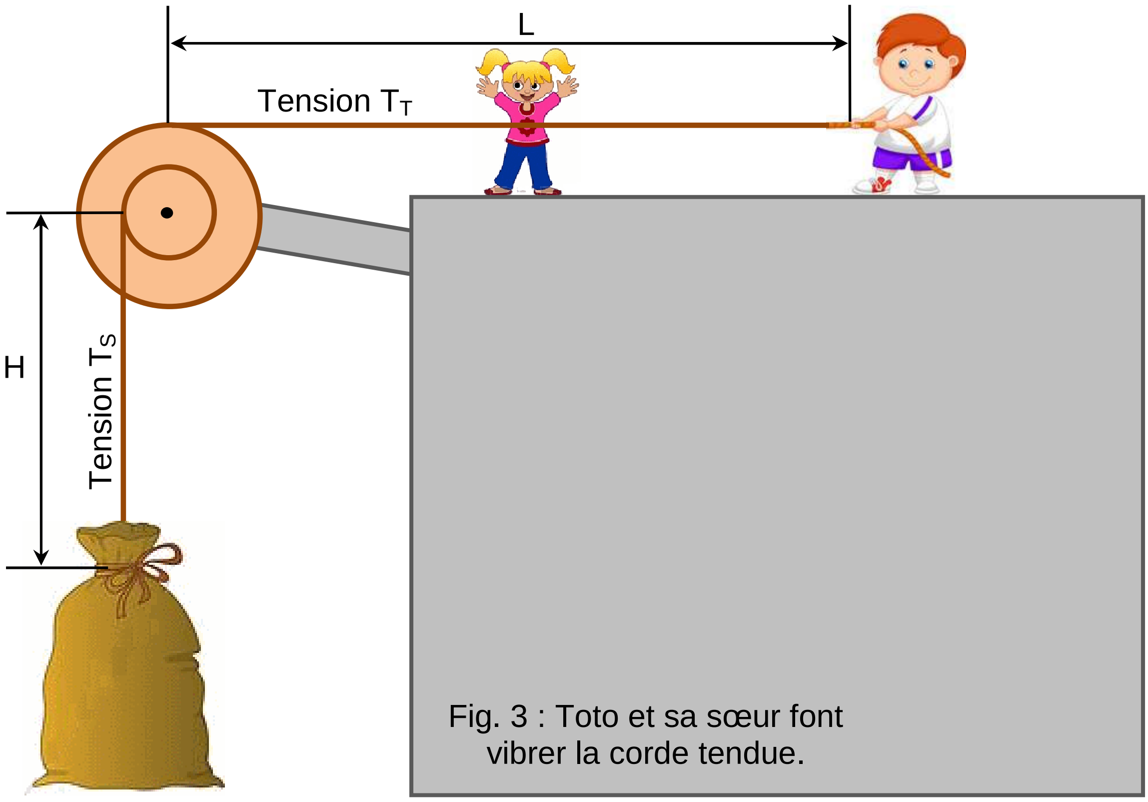


Fig. 3 : Toto et sa sœur font vibrer la corde tendue.

2.1. Rappeler la formule qui lie la première fréquence propre $N_{01}$ de la corde tendue à sa longueur L, à sa tension $T_T$ et à sa masse linéique µ.

2.2. Exprimer la tension $T_T$ en fonction des grandeurs connues ($N_{01}$, L et µ).

2.3. Sachant que L = 2 m, µ = 50 g/m et $N_{01}$ = 25 Hz, quel est le poids du sac ?

Toto applique la même méthode pour savoir de quelle hauteur H il doit encore monter le sac, en faisant vibrer de la même façon la corde verticale à laquelle il est suspendu, immobile (Fig. 3).
La mise linéique µ est la même pour les 2 cordes.

2.4. Exprimer la hauteur H en fonction des grandeurs connues ($T_S$, µ et la fréquence fondamentale $N'_{01}$ de cette corde).

2.5. Quelle est la valeur de cette hauteur H si $N'_{01}$ = 20 Hz ?