EXAMEN FINAL - MQ40/MQ43

***Temps** : 2h ; **Documents autorisés :** uniquement le cours*

Exercice 1 : Oscillation Masse - Ressort

PARTIE A : On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1. La masse des deux ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. *Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.*

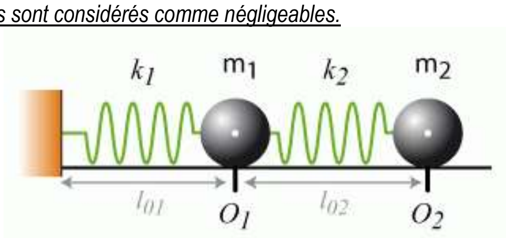


Schéma du dispositif

1. Etablir le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps.
2. On considère désormais que les blocs sont de masse identique de sorte que $m_1 = m_2 = m$. Par ailleurs, on posera $k_1 = k$ et $k_2 = \alpha k$. On considère également que la constante de raideur k_2 est bien supérieure à k_1 de sorte que $\alpha \gg 1$.

   2.a) Ecrire le système de deux équations différentielles obtenu à la question 1 sous la forme vectorielle : $\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = A.\vec{X}$. Dans la matrice A on considérera que $\pm 1 \pm \alpha \approx \pm\alpha$. Ceci étant admis, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
   2.b) Montrer que la solution générale du système d'équations du mouvement s'écrit sous une forme simple.
   2.c) Préciser le ou les mode(s) propre(s) de vibration du système d'oscillateurs et donner la ou les pulsation(s) propre(s) de vibration du système.
3. A l'instant $t = 0$, le bloc de masse m_1 est écarté d'une distance $a_0 > 0$ de sa position d'équilibre tandis que le bloc de masse m_2 en est écarté d'une distance $-a_0 < 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.
   Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du ou des mode(s) propre(s) de vibration excité(s) par ces conditions initiales.

PARTIE B : **En ajoute ensuite un autre ressort afin d'obtenir le system suivant :**

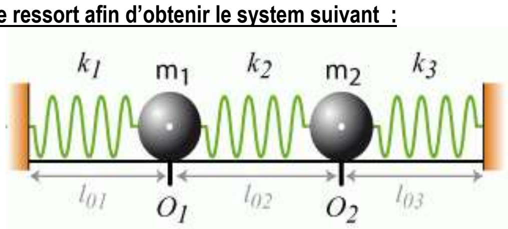


Schéma du dispositive

1. Etablir le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps.
2. On considère désormais que les blocs sont de masse identique de sorte que $m_1 = m_2 = m$ et que les ressorts ont la même constante de raideur $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

   2.a) Ecrire le système de deux équations différentielles obtenu à la question 1 sous la forme vectorielle : $\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = A.\vec{X}$ et déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
   2.b) Montrer que la solution générale du système d'équations du mouvement s'écrit sous une forme simple.
   2.c) Préciser le ou les mode(s) propre(s) de vibration du système d'oscillateurs et donner la ou les pulsation(s) propre(s) de vibration du système.
3. A l'instant $t = 0$:

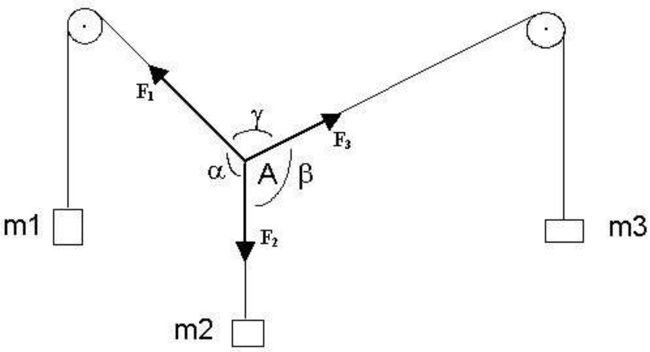
   3.a) Le bloc de masse m_1 est écarté d'une distance $a_0 > 0$ de sa position d'équilibre tandis que le bloc de masse m_2 en est écarté d'une distance $-a_0 < 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.
   Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales.

   3.b) Les blocs de masse m_1 et m_2 sont écartés de leur position d'équilibre d'une distance $a_0 > 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du mode propre de vibration excité par ces conditions initiales.

Exercice 2 : Equilibre & Système Statique

Soit le système décrit dans la figure 3 *(trois masses qui sont liés par deux poulies qui transferts les efforts sans frottement).*

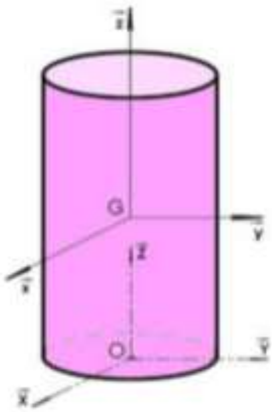


<u>Système de Trois Masses</u>

1. Déterminer les Forces et leurs directions pour chaque masse **M_i** par rapport aux tensions F1, F2 et F3 ? Redessiner le système en représentant clairement chaque effort.
2. Quels sont les conditions pour que le système (Figure 3) soit en équilibre statique? *Placer le repère global au centre de la première poulie.* ***On notera P_1, P_2 et P_3 les poids des masses M_1, M_2 et M_3.***

Exercice 3 :

1- Déterminez la matrice centrale d'inertie d'un cylindre de révolution plein et homogène de masse **M**, de rayon R et de hauteur H. Déterminer cette matrice d'inertie par rapport au repère central d'inertie du cylindre Rg (G, x, y, z). A noter dV=rdrd θ dz en coordonnées cylindriques.



2- Pour M=1, H=4R=1, donner les valeurs propres pour la matrice centrale d'inertie obtenue.

3- -Déduisez-en la matrice d'inertie au centre de l'une de ses bases. **On peut appliquer le théorème de Huygens**.

4- -Déduire cette matrice d'inertie dans le cas particulier d'un disque et d'un barreau cylindrique. Masse M, rayon R et d'épaisseur négligeable devant R.

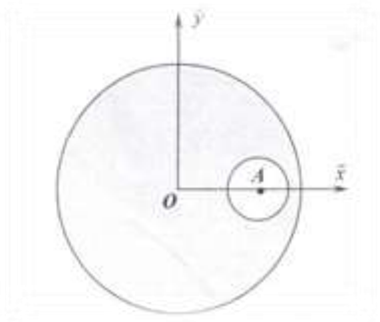
Choix du paramétrage : Nous utiliserons les coordonnées cylindriques r, θ et z avec dV=rdrd θ dz

Exercice 4 :

Le volant représenté dans la figure ci-dessous est caractérisé par sa masse **M** et son rayon **R**. Il comporte un trou circulaire centré en A (OA = a) et de rayon **r**.

1. Déterminer le centre d'inertie **G** du volant.

2. Calculer la matrice d'inertie au point O.
3. En déduire la matrice d'inertie au centre d'inertie G.
4. Calculer son moment d'inertie par rapport à la première bissectrice.

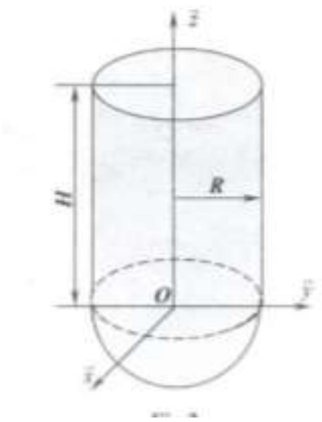


<u>Système de Volant</u>

Exercice 5 :

Un solide (**S**) homogène de masse **M** est constitué par un cylindre plein de hauteur **H**, de rayon **R** et par une demi-sphère pleine de rayon **R**. Le cylindre et la demi-sphère sont assemblés par soudure comme l'indique la figure ci-dessous.

1. Expliquer pourquoi le repère (O, x, y, z) est principal d'inertie?
2. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.
3. Déterminer la matrice d'inertie en 0, relativement à la base (x, y, z)
4. En déduire, dans la même base la matrice principale et centrale d'inertie du solide.



<u>Système</u> **<u>Cylindre - Demi-Sphère</u>**