24/10/14

MEDIAN MQ40 - MQ43

Réponses

1.1

$$I_{1xOz} = \iiint_{S1} \rho\, y^2\, dv$$

$$I_{1xOz} = \rho \int_{-L}^{0} dz \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2\, dy$$

$$\boxed{I_{1xOz} = \rho \frac{Lc^4}{12}}$$

1.2 Compte-tenu de la symétrie du solide S1, le moment d'inertie I_{1yOz} est égal au moment d'inertie I_{1xOz}.

$$\boxed{I_{1yOz} = \rho \frac{Lc^4}{12}}$$

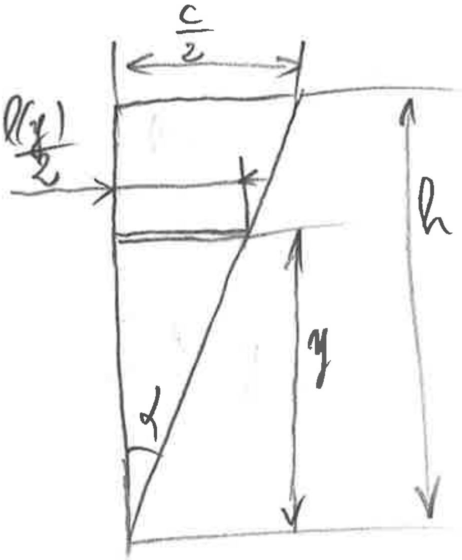
1.3 Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est la somme des 2 moments d'inertie par rapport à 2 plans perpendiculaires se coupant en cet axe.

$$I_{1Oz} = I_{1xOz} + I_{1yOz}$$

$$\boxed{I_{1Oz} = \rho \frac{Lc^4}{6}}$$

2

1.4



$$tg(\alpha) = \frac{\ell(y)}{2y} = \frac{c}{2h}$$

$$\boxed{\ell(y) = \frac{cy}{h}}$$

1.5

$$I_{2xO_3} = \rho \iiint_{S_2} y^2 \, dv$$

$$I_{2xO_3} = \rho \int_{-L}^{0} dz \int_0^h y^2 \left(\int_{-\frac{\ell(y)}{2}}^{+\frac{\ell(y)}{2}} dx \right) dy$$

$$I_{2xO_3} = \rho L \int_0^h y^2 \, \ell(y) \, dy$$

$$I_{2xO_3} = \rho \frac{Lc}{h} \int_0^h y^3 \, dy$$

$$\boxed{I_{2xO_3} = \rho \frac{Lch^3}{4}}$$

1.6

$$I_{2yO_3} = \rho \iiint_{S_2} x^2 \, dv$$

$$I_{2yO_3} = \rho \int_{-L}^{0} dz \int_0^h \left(\int_{-\frac{\ell(y)}{2}}^{\frac{\ell(y)}{2}} x^2 \, dx \right) dy$$

$$I_{2yO_3} = \rho L \int_0^h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\ell(y)}{2}}^{\frac{\ell(y)}{2}} dy$$

$$I_{2yO_3} = \rho \frac{L}{3} \int_0^h \frac{\ell(y)^3}{4} dy$$

$$I_{2yO_3} = \rho \frac{L c^3}{12 h^3} \frac{h^4}{4}$$

$$\boxed{I_{2yO_3} = \rho \frac{L c^3 h}{48}}$$

1.7 Comme pour 1.3 : $I_{2O_3} = I_{2xO_3} + I_{2yO_3}$

$$\boxed{I_{2O_3} = \rho \frac{L c h}{48} \left(c^2 + 12 h^2\right)}$$

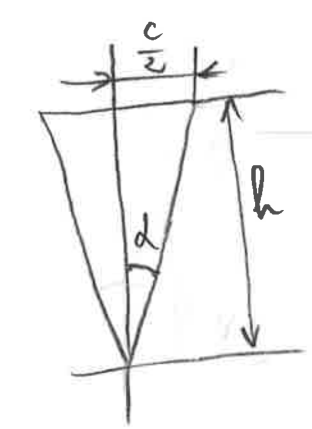
1.8 Dans ce cas particulier : $h = \frac{c}{2}$

$$I_{1O_3} = 4\, I_{2O_3}^{\text{Avec } h = \frac{c}{2}}$$

$$I_{1O_3} = 4 \rho \frac{L c^2}{48 \times 2} \left(c^2 + 12 \frac{c^2}{4}\right)$$

$$\boxed{I_{1O_3} = \rho \frac{L c^4}{6}}$$ Le résultat de 1.3 est bien retrouvé

1.9



Base de S3 : prisme régulier à n côtés

$\alpha = \frac{\pi}{n}$

$tg(\alpha) = \frac{c}{2h}$ $\boxed{c = 2h\, tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

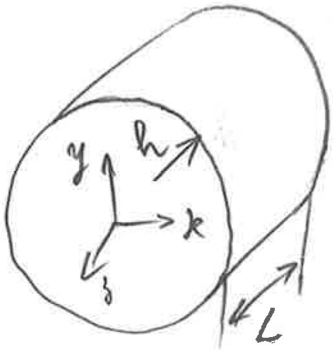
1.10

$$I_{3Oz} = n \rho \frac{L h}{48} 2h \, tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[4h^2 tg^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 12h^2\right]$$

$$\boxed{I_{3Oz} = \frac{n \rho L h^4}{6} tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[3 + tg^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}$$

1.11

Quand $n \to \infty$, le prisme tend vers un <u>cylindre</u> de rayon h.



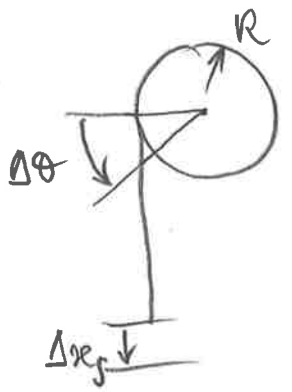
$n \to \infty \qquad \frac{\pi}{n} \to 0 \qquad tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \simeq \frac{\pi}{n}$

$$I_{3Oz}^{n\to\infty} \simeq \frac{n \rho L h^4}{6} \frac{\pi}{n} \times 3$$

$$\boxed{I_{3Oz}^{n\to\infty} \simeq \frac{\rho \pi L h^4}{2}}$$

La formule donne bien le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe, soit $\frac{MR^2}{2}$ avec $M = \rho L \pi R^2$ et $R = h$.

2.1



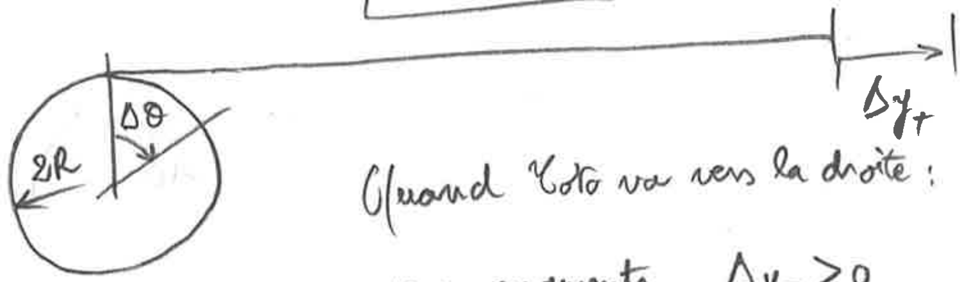
Quand le sac descend :

* x_S augmente, $\Delta x_S > 0$
* la poulie tourne dans le sens positif

$\Delta\theta > 0$

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\Delta x_S}{R}}$$

2.2



Quand Toto va vers la droite :

* y_T augmente, $\Delta y_T > 0$
* la poulie tourne dans le sens négatif

$\Delta\theta < 0$

$$\boxed{\Delta\theta = -\frac{\Delta y_T}{2R}}$$

2.3

* Les tensions des cordes, le poids de la poulie et la réaction de l'axe s'équilibrent : $\vec{R} = \vec{0}$
* Le moment résultant n'a qu'une composante non-nulle suivant z, compte-tenu des hypothèses posées.

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_S R - 2T_T R \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\{\mathcal{C}\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & T_S R - 2T_T R \end{Bmatrix}}$$

$\boxed{2.4}$ Sac immobile : les efforts qui s'exercent sur lui ont une résultante nulle :

$$T_S = m_S g$$

Poulie immobile : moment appliqué nul.

$$T_S R = 2 T_T R$$

$$\boxed{T_T = \frac{1}{2} m_S g}$$

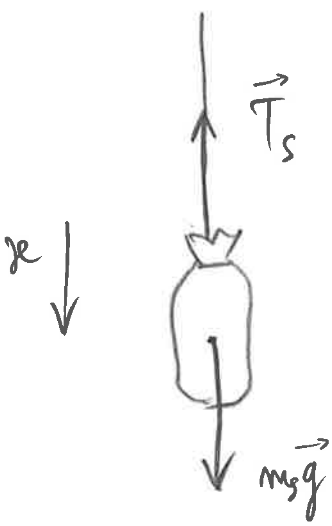
$\boxed{2.5}$ Mouvement uniforme : torseurs des efforts appliqués nul pour le sac et pour la poulie, comme pour l'immobilité.

$$\boxed{T_T = \frac{1}{2} m_S g}$$

$\boxed{2.6}$ Accélération du sac.

$$- T_S + m_S g = m_S x_S''$$

$$\boxed{x_S'' = g - \frac{T_S}{m_S}}$$



$\boxed{2.7}$ Accélération de la poulie.

$$T_S R - 2 T_T R = I \theta''$$

$$\boxed{\theta'' = \frac{R}{I}(T_S - 2T_T)}$$

2.8

D'après 2.1 : $\theta'' = \frac{x_S''}{R}$

D'après 2.6 : $x_S'' = g - \frac{T_S}{m_S} \longrightarrow T_S = m_S(g - x_S'')$

D'après 2.7 : $\theta'' = \frac{R}{I}(T_S - 2T_T)$

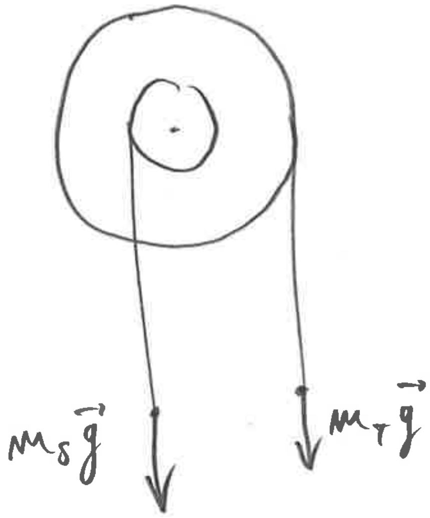
$$\frac{x_S''}{R} = \frac{R}{I}\left[m_S(g - x_S'') - 2T_T\right]$$

$$x_S''(I + m_S R^2) = R^2(m_S g - 2T_T)$$

$$\boxed{x_S'' = R^2 \frac{m_S g - 2T_T}{I + m_S R^2}}$$

2.9

A l'arrêt, quand Toto se suspend à sa corde :



$$\begin{cases} T_S = m_S g \\ T_T = m_T g \end{cases}$$

Pour que la poulie se mette à tourner dans le sens négatif, il faut que le moment qui lui est appliqué soit < 0.

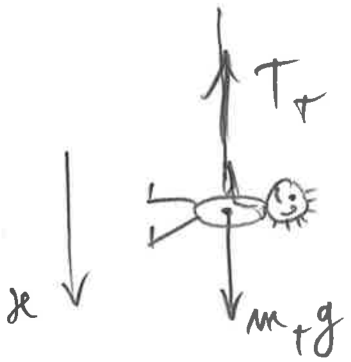
$$T_S - 2T_T < 0$$

$$m_S g - 2m_T g < 0$$

$$\boxed{m_T > \frac{m_S}{2}}$$

(Réponse juste trouvée intuitivement acceptée)

2.10 Accélération de Toto.



$$-T_T + m_T g = m_T x''_T$$

$$x''_T = g - \frac{T_T}{m_T}$$

$$T_T = m_T (g - x''_T)$$

D'autre part, d'après 2.1 et 2.2 : $x''_T = -2 x''_S$

(ici, y_T doit être remplacé par x_T).

Le résultat de 2.8 devient :

$$-\frac{1}{2} x''_T = R^2 \frac{m_S g - 2 m_T (g - x''_T)}{I + m_S R^2}$$

$$-\frac{1}{2} x''_T (I + m_S R^2) - 2 m_T x''_T R^2 = R^2 g (m_S - 2 m_T)$$

$$\boxed{x''_T = \frac{2 g R^2 (2 m_T - m_S)}{I + m_S R^2 + 4 m_T R^2}}$$

2.11 Descente uniformément accélérée.

$$x_T = \frac{1}{2} x''_T t^2$$

$$H = \frac{1}{2} x''_T t_f^2$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{x''_T}}$$

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{H (I + m_S R^2 + 4 m_T R^2)}{g R^2 (2 m_T - m_S)}}}$$

$\boxed{2.12}$ $x'_T = x''_T \, t$

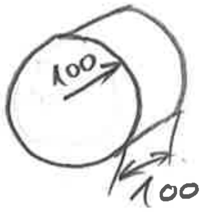
À l'arrivée : $x'_T(t_f) = x''_T \, t_f$

$$x'_T(t_f) = x''_T \sqrt{\frac{2H}{x''_T}}$$

$$x'_T(t_f) = \sqrt{2H \, x''_T}$$

$$\boxed{x'_T(t_f) = \sqrt{\frac{4gR^2H(2m_T - m_S)}{I + m_S R^2 + 4m_T R^2}}}$$

$\boxed{2.13}$ Calcul de I (pas demandé dans le sujet).



Acier $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-6}$ kg/mm³

$M_1 = \rho\pi \times 100^2 \times 100$

$I_1 = \frac{1}{2}\rho\pi \times 10^6 \times 10^4$

$M_2 = \rho\pi \times 200^2 \times 100$ $\quad M_2 = 4M_1$

$I_2 = \frac{1}{2}\rho\pi \times 4 \times 10^6 \times 4 \times 10^4$ $\quad I_2 = 16 I_1$

$I = I_1 + I_2 \quad I = 17 I_1$

$I = 17 \times \frac{1}{2} \times 7{,}85 \cdot 10^{-6} \times \pi \times 10^{10}$

$I = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg.mm² $\quad$ D'où la donnée : $I = 2$ kg.m²

$$I + m_S R^2 + 4 m_T R^2$$

$$= 2 + 100 \cdot 10^{-2} + 220 \cdot 10^{-2}$$

$$= 5{,}2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$2 m_T - m_S$$

$$= 2 \times 55 - 100$$

$$= 10 \text{ kg}$$

$$t_f = \sqrt{\frac{10 \times 5{,}2}{10 \cdot 10^{-2} \times 10}} \qquad \boxed{t_f = 7{,}21 \text{ s}}$$

$$x_T'(t_f) = \sqrt{\frac{4 \times 10 \times 0{,}1^2 \times 10 \times 10}{5{,}2}} \qquad \boxed{x_T'(t_f) = 2{,}77 \text{ m/s}}$$

Semble acceptable si Toto est suffisamment sportif.