MQ40 - MQ43 - Automne 2014
Sujet de l'Examen MEDIAN
25/10/2014

Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Moments d'inertie divers et variés

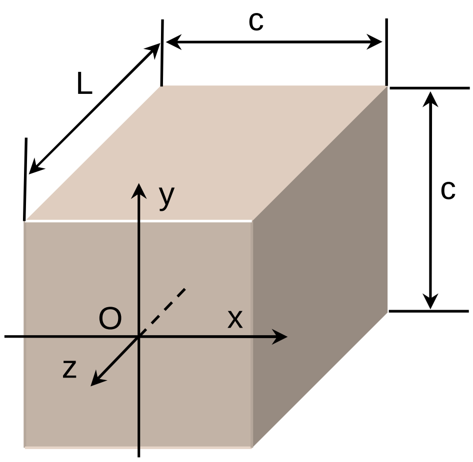

Fig. 2 : Parallélépipède rectangle S1 possédant 2 faces carrées.

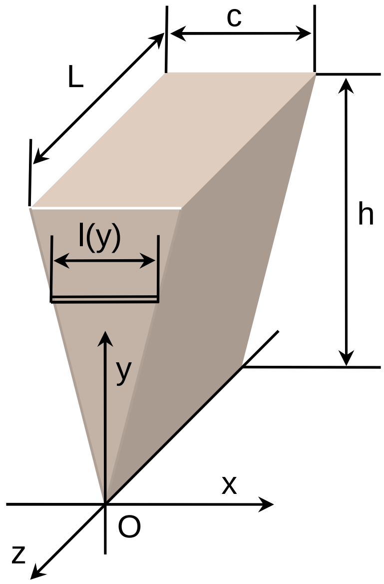

Fig. 1 : Prisme S2 de base triangulaire isocèle.

Dans ce premier exercice, on calcule des moments d'inertie de différents solides, qui sont toujours constitués d'un même matériau homogène, de masse volumique ρ.

1.1. Calculer le moment d'inertie I_{1xOz}, par rapport au plan xOz, du parallélépipède rectangle S1 de la Fig. 2.

1.2. Quel est le moment d'inertie I_{1yOz}, par rapport au plan yOz, du parallélépipède rectangle S1 de la Fig. 2.

1.3. En utilisant les résultats des questions 1.1 et 1.2, donner l'expression du moment d'inertie I_{1Oz}, par rapport à son axe Oz, du parallélépipède rectangle S1 de la Fig. 2.

1.4. Soit le prisme S2 défini par la Fig. 1.
Exprimer sa largeur l(y), en fonction de y, ainsi que des dimensions c et h.

1.5. En utilisant le résultat de la question 1.4, calculer le moment d'inertie I_{2xOz}, par rapport au plan xOz, du prisme S2 de la Fig. 1.

1.6. En utilisant le résultat de la question 1.4, calculer le moment d'inertie I_{2yOz}, par rapport au plan yOz, du prisme S2 de la Fig. 1.

1.7. En utilisant les résultats des questions 1.5 et 1.6, donner l'expression du moment d'inertie I_{2Oz}, par rapport à l'axe Oz, du prisme S2 de la Fig. 1.

MQ40 - MQ43 - Automne 2014
Sujet de l'Examen MEDIAN
25/10/2014

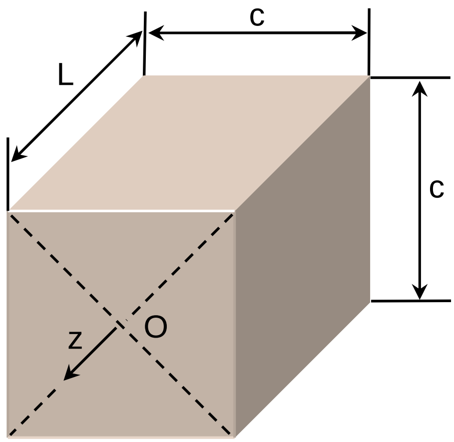

Fig. 4 : Parallélépipède rectangle vu comme la réunion de 4 prismes de base triangulaire isocèle.

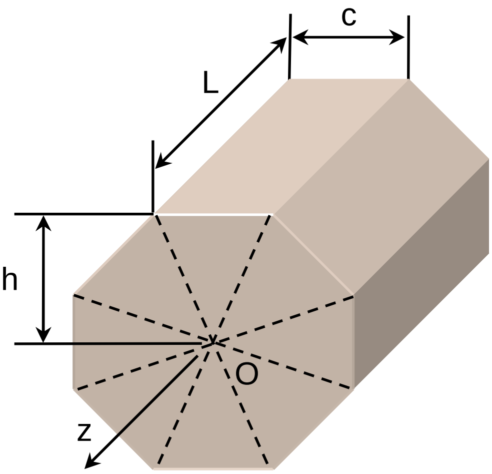

Fig. 3 : Octogone régulier vu comme la réunion de 8 prismes de base triangulaire isocèle.

1.8. La Fig. 4 montre que le parallélépipède rectangle de la Fig. 2 peut être considéré comme la réunion de 4 prismes semblables à celui de la Fig. 1, avec une relation particulière entre h et c.
Retrouver le résultat de la question 1.3 (moment d'inertie I_{1Oz}, par rapport à son axe Oz, du parallélépipède rectangle S1 de la Fig. 2) à partir du résultat de la question 1.7 (moment d'inertie I_{2Oz}, par rapport à l'axe Oz, du prisme S2 de la Fig. 1).

1.9. Soit un prisme droit dont la base est un polygone régulier à n côtés.
Un tel prisme peut être considéré comme la réunion de n prismes semblables à celui de la Fig. 1, comme le montre la Fig. 3 (pour le cas n = 8).
Trouver la relation qui existe entre c, h et n.

1.10. A partir du résultat de la question 1.7 (moment d'inertie I_{2Oz}, par rapport à l'axe Oz, du prisme S2 de la Fig. 1), trouver le moment d'inertie I_{3Oz} d'un prisme S3 dont la base est un polygone régulier à n côtés.
Utiliser le résultat de la question 1.9 pour donner l'expression de I_{3Oz} en fonction de ρ, n, L et h uniquement.

1.11. Quand n tend vers l'infini, vers quelle géométrie simple ce prisme S3 (dont la base est un polygone régulier à n côtés) tend-il ?
Montrer que la formule donnant I_{3Oz} permet bien de retrouver, lorsque n tend vers l'infini, le moment d'inertie, par rapport à son axe, de ce solide simple (résultat vu en cours qu'il n'est pas demandé de démontrer).

2. Toto et l'astucieuse poulie

Pour monter des sacs dans son grenier, Toto dispose d'une poulie astucieuse, constituée de 2 cylindres de diamètres différents, sur lesquels s'enroulent 2 cordes parfaitement flexibles et inextensibles, de masse et d'épaisseur négligeables, comme le montre la Fig. 5.
La masse d'un sac est notée m_S et l'accélération de la pesanteur, dans la direction verticale x, est notée g.
La poulie, dont la Fig. 6 précise la géométrie, possède un moment d'inertie I par rapport à son axe de révolution et tourne sans aucun frottement autour d'un axe fixe.
Soient T_T la tension de la corde sur laquelle tire Toto et T_S la tension de la corde à laquelle est suspendu un sac.

MQ40 - MQ43 - Automne 2014
Sujet de l'Examen MEDIAN
25/10/2014

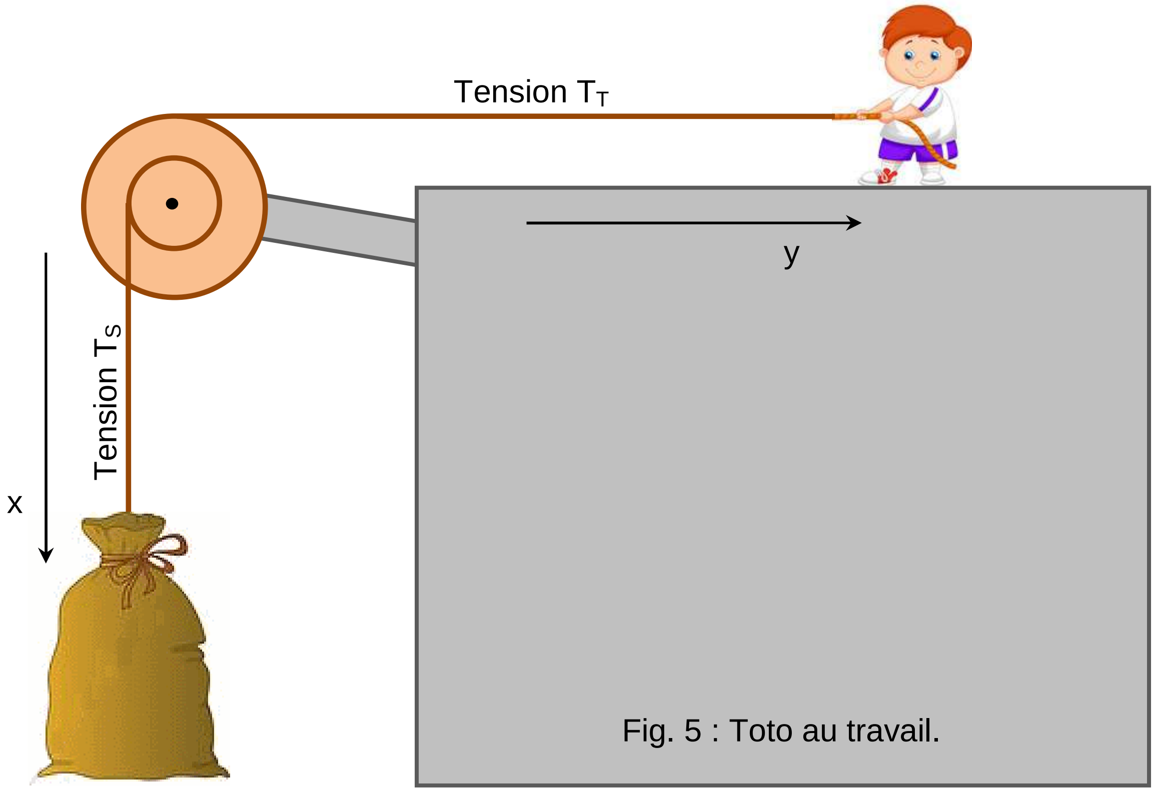

Fig. 5 : Toto au travail.

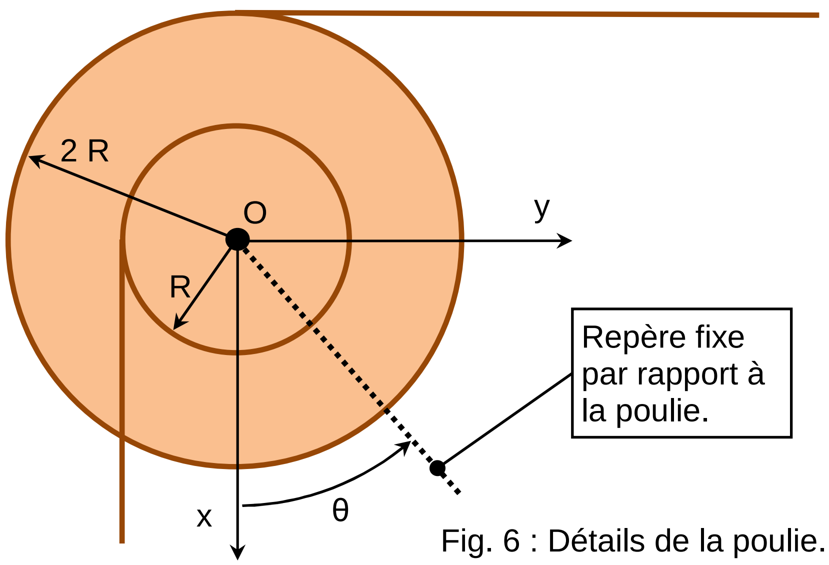

Fig. 6 : Détails de la poulie.

2.1. Quelle est la variation $\Delta\theta$ de l'angle θ lorsqu'un sac descend de Δx_S dans la direction verticale x ?

2.2. Quelle est la variation $\Delta\theta$ de l'angle θ lorsque Toto se déplace de Δy_T dans la direction horizontale y ?

2.3. Quelles sont les 6 composantes du torseur des efforts exercés sur la poulie, exprimé en son centre de gravité O, en considérant que les cordes sont dans le plan xOy ?

MQ40 - MQ43 - Automne 2014
Sujet de l'Examen MEDIAN
25/10/2014

2.4. Quelle doit être la tension T_T pour que le sac soit immobile ?

2.5. Quelle doit être la tension T_T pour que le sac monte à vitesse constante ?

2.6. Pour une tension T_S donnée, quelle est l'accélération x''_S du sac ?

2.7. Les tensions T_S et T_T étant supposées connues, quelle est l'accélération angulaire θ'' de la poulie ?

2.8. En tenant compte de la relation qui existe entre x''_S et θ'', calculer l'accélération x''_S du sac lorsque Toto applique à sa corde une tension T_T.
x''_S sera exprimée en fonction des données m_S, I, R, g et T_T.

Pour la suite de l'exercice, Toto utilise le même dispositif, en se suspendant à sa corde, dans le but de descendre du grenier tout en montant le dernier sac (Fig. 7).

2.9. Quelle est la condition nécessaire concernant la masse m_T de Toto pour qu'il puisse effectivement descendre ?

2.10. En supposant cette condition remplie, et en réutilisant les résultats précédents, déterminer l'accélération x''_T de Toto en fonction des données m_T, m_S, I, R et g.

2.11. Si Toto commence sa descente sans vitesse initiale, au bout de quel temps t_f aura-t-il parcouru une hauteur H ?

2.12. Quelle sera alors sa vitesse $x'_T(t_f)$?

2.13. Application numérique.

$m_S = 100$ kg	$R = 0{,}1$ m	$I = 2\ kg.m^2$
$m_T = 55$ kg	$H = 10$ m	$g = 10\ m/s^2$

Calculer t_f et $x'_T(t_f)$.

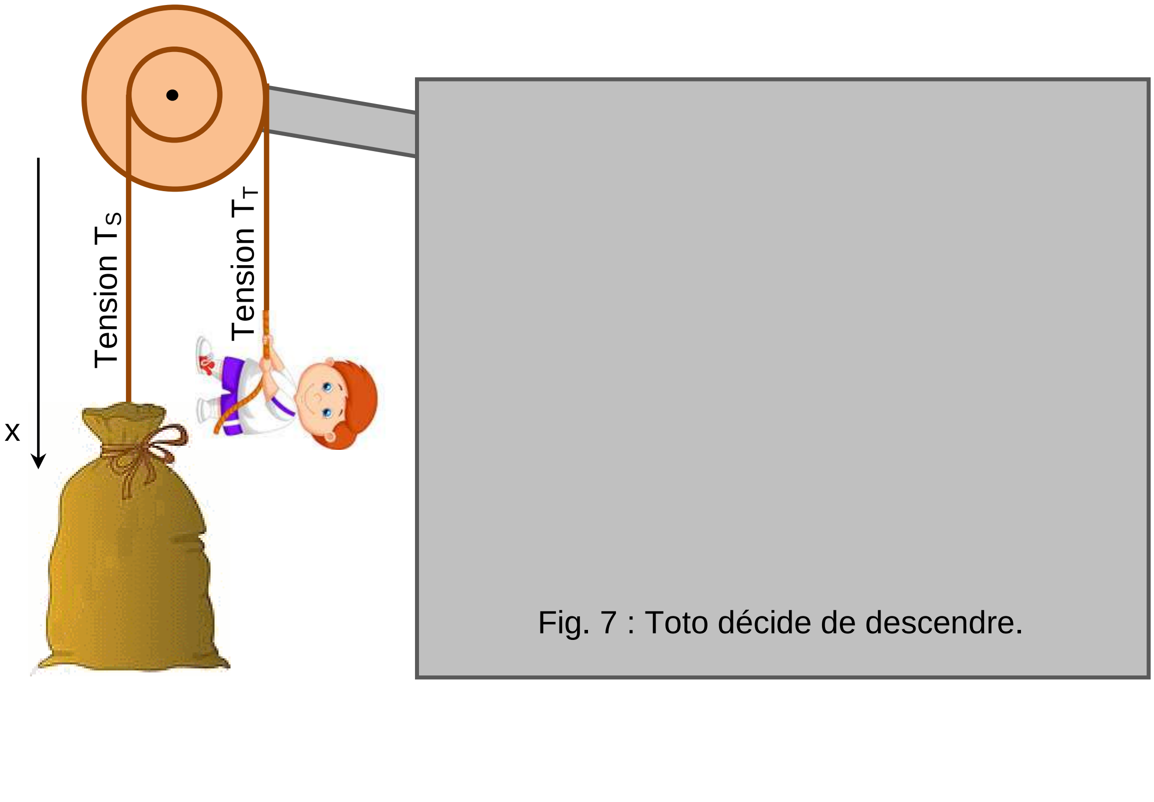

Fig. 7 : Toto décide de descendre.